Universität Bonn
Institut für Informatik

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
8. September 2022

Übungszettel 4

Aufgabe 1: Beweise mit Mengen

Seien A_1, A_2, B_1 und B_2 Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $A_1 \subseteq B_1$ und $A_2 \subseteq B_2$ gilt, dann gilt auch $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$.

b) Aus $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$ folgt nicht $A_1 \subseteq B_1$ oder $A_2 \subseteq B_2$.

Aufgabe 2: Fehlerhafter Beweis

Begründen Sie, warum der folgende Beweis nicht korrekt ist:

$$5 = \sqrt{25} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$$

Aufgabe 3: Fehlerhafter Beweis die Zweite

Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, warum der folgende Beweis nicht korrekt ist:

$$\begin{array}{cccccl}
 & a & = & b & & \\
\Leftrightarrow & a^2 & = & a \cdot b & & \\
\Leftrightarrow & a^2 - b^2 & = & a \cdot b - b^2 & & \\
\Leftrightarrow & (a+b) \cdot (a-b) & = & b \cdot (a-b) & & \\
\Leftrightarrow & a+b & = & b & & \\
\Leftrightarrow & 2b & = & b & & \text{, da } a = b \text{ können wir } a + b = 2b \text{ schreiben} \\
\Leftrightarrow & 2 & = & 1 & &
\end{array}$$

Aufgabe 4: Beweise

Beweisen Sie folgende Aussagen mit einem direktem Beweis. Achten Sie bitte auf korrekte schriftliche Form (Was ist gegeben? Was ist zu zeigen?)

a) Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

b) Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

c) Seien x, $y \in \mathbb{R}$. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ gilt nur, falls $x = 0$ oder $y = 0$.

d) Seien x, $y \in \mathbb{R}$. Das Maximum zweier Zahlen wird mit $\max(x, y)$ bezeichnet. Es gilt, dass $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |y - x|)$.

Aufgabe 5: $\star$ Widerspruchsbeweise

a) Beweisen Sie durch Widerspruch: Es existiert keine kleinste positive rationale Zahl.

b) Zeigen Sie per Widerspruch: Ist eine rationale Zahl q keine Ganzzahl, dann ist auch q^2 keine Ganzzahl.

c) Folgern Sie aus b): Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist n keine Quadratzahl, dann ist $\sqrt{n}$ irrational.

Aufgabe 6: $\star$ Schachbrett

Man nehme ein gewöhnliches 8×8 Schachbrett, wobei jedoch die obere linke und die untere rechte Ecke entfernt wurden. Die Ausrichtung des Schachbretts (unten links ist weiß oder schwarz) ist dabei irrelevant.

Beweisen oder widerlegen Sie: Man kann das verbleibende Brett mit 31 zwei-Felder-großen Steinchen (2×1: $\square\square$) so belegen, dass alle Felder bedeckt ist.