Universität Bonn
Institut für Informatik

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
9. September 2022

Übungszettel 5

Vollständige Induktion I - Die dunkle Bedrohung

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Summenwerte. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

b) $1 + \left(\frac{2^0}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \ldots + \frac{2^{2(n-1)}}{3^n}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

c) $\star$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Vollständige Induktion II - Angriff der Mathematiker

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Teilbarkeitsregeln. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $n^2 + n$ ist durch 2 teilbar.

b) $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

c) $2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar.

d) $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar.

e) $\star$ $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

$\star$ Episode III - Die Rache der Nerds

Die Geschichte spielt in einem kleinen Dorf in Bordurien. In dem Dorf leben viele Ehepaare, allerdings ist die Moral nicht besonders hoch: viele Ehemänner gehen ihren Frauen fremd. Die Männer sind aber sehr geschickt, weshalb nie eine Frau bemerkt, ob ihr eigener Mann fremdgeht. Sehr wohl weiß aber jede Frau, welche anderen Männer (außer ihrem eigenen) fremdgehen. Jedoch ist die Sorge vor Gesichtsverlust so hoch, dass nie eine Frau einer anderen erzählen würde, ob deren Mann fremdgeht.

Das Fremdgehen nimmt so Besorgnis erregende Züge an, dass eines Tages die Partei ein Machtwort spricht und folgendes Dekret erlässt: “In unserem Dorf gibt es Männer, die fremdgehen. Wenn eine Frau zu der Erkenntnis gelangt, dass ihr Mann fremdgeht, so bringe sie ihn in der darauf folgenden Nacht um.”

36 Nächte lang geschieht nichts. Aber in der 37. Nacht werden alle 37 ehebrechenden Männer von ihren Frauen umgebracht.

Sie haben zusätzlich zur Informatik noch Anthropologie studiert, waren in dieses Dorf gereist und haben alles mit angesehen. Sie wissen auch, dass alle Frauen aus diesem Dorf für ihr ausgezeichnetes logisches Denken und ihre Linientreue bekannt sind. Können Sie das Geschehen erklären?

Vollständige Induktion IV - Eine neue Hoffnung

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Produktwerte. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

a) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

b) $\star$ $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, falls $n \geq 2$.

Vollständige Induktion V - Das Institut schlägt zurück

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) $\star$ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

b) Für $4 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt: $n! > 2^n$.

c) Für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 - 2n - 1 > 0$.

$\star$ Vollständige Induktion VI - Die Rückkehr der Informatiker

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

Für eine endliche Menge M hat deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Mächtigkeit $2^{|M|}$.