Universität Bonn
Institut für Informatik

Übungszettel 6

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
12. September 2022

Aufgabe 1: Relationen

Seien R und S zwei Relationen auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

- $R := \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2), (6, 6), (6, 3), (6, 7), (7, 7)\}$
- $S := \{(1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 7), (4, 4), (4, 7), (5, 1), (5, 5), (7, 3), (7, 4)\}$

Zeichnen Sie die Graphen der Relationen R, S und $R \cup S$. Sind die Relationen R, S und $R \cup S$ reflexiv, transitiv, symmetrisch?

Aufgabe 2: Relationen II

Sei G die Menge aller eingeschriebenen Bonner Studenten und $R \subseteq G \times G$ eine Relation und sei $(a, b) \in R$. Nennen Sie jeweils, ob die Relation R folgende Eigenschaften erfüllt: reflexiv, total, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv; ebenso ob R eine Äquivalenzrelation, eine partielle oder totale Ordnung ist.

a) a ist mit b in direkter Linie verwandt.

b) a hat b gestern in der Uni gesehen.

c) a und b trinken gerne Wein.

d) a wohnt im Studentenwohnheim unter b.

e) a ist mit b befreundet.

f) a kennt b.

g) a hat sich im gleichen Jahr oder später als b eingeschrieben.

h) a's Matrikelnummer ist nicht kleiner als b's.

Einige Antworten hängen natürlich von der Definition ab. Wir haben uns dafür entschieden, dass man mit sich selbst verwandt ist, sich selber sehen kann, mit sich selbst befreundet sein kann und sich selber kennen kann.

Aufgabe 3: $\star$Äquivalenzrelationen

a) Nennen und erklären Sie alle notwendigen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

b) Ist $R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (3, 1)\}$ auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4\}$ eine Äquivalenzrelation?

c) Beweisen Sie, dass "$=$" eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4: ⋆⋆Beweise mit Relationen

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert keine binäre Relation R auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die sowohl reflexiv, transitiv, symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Seien A und B zwei partielle Ordnungen auf M, dann ist $A \cap B$ ebenfalls eine partielle Ordnung.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Seien A und B zwei partielle Ordnungen auf M, dann ist $A \cup B$ ebenfalls eine partielle Ordnung.

Aufgabe 5: Funktionen

Zeigen oder widerlegen Sie ob die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto z + 1$

c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $q \mapsto 2 \cdot q$

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z^5$

e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$

f) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

g) ⋆ Sei $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $f : M \to M$ mit $x \mapsto (2x) \bmod 5$.

h) ⋆ Zeigen Sie, dass eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ existiert.

Aufgabe 6: ⋆ Rätsel des Tages - Zahlenreihen

a) Die Zahlenreihe beginnt mit einer 3. Jede Zahl der Folge ist um 1 größer als die Hälfte der nächsten Zahl. Wie lautet die fünfte Zahl?

b) Wie lautet die nächste Zahl in dieser Zahlenreihe: 2 – 5 – 10 – 17 – 28 – ?

c) Wie lautet die nächste Zahl in dieser Zahlenreihe: 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – ?

Und noch ein paar Buchstabenreihen:

d) Welcher Buchstabe folgt als nächstes in dieser Reihe: E – Z – D – V – F – ?

e) Welcher Buchstabe folgt als nächstes in dieser Reihe: M – D – M – D – F – ?