Universität Bonn
Institut für Informatik

Übungszettel 7

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
13. September 2022

Aufgabe 1: Vollständige Induktionen des Tages

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

b) $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$, für $n \geq 3$

Aufgabe 2: Gruppen

Gegeben sei $G = \{a, b, c\}$ und die Verknüpfung $\circ$ gegeben durch folgende Verknüpfungstafel:

$\circ$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist. Gehen Sie die Gruppenaxiome durch und überprüfen Sie diese. Schreiben Sie dazu zuerst formal auf, was Sie zeigen sollen.

Tipp: lösen Sie b) als letztes.

a) $(G, \circ)$ ist abgeschlossen.

b) $(G, \circ)$ ist assoziativ.

c) $(G, \circ)$ hat ein neutrales Element. Welches?

d) $(G, \circ)$ hat zu jedem Element ein Inverses.

e) $(G, \circ)$ ist kommutativ.

Aufgabe 3: $\star$ Gruppenen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und sei ein festes $a \in G$ gegeben. Wir definieren eine neue Verknüpfung $x * y = x \circ a \circ y$. Zeigen Sie, dass auch $(G, *)$ eine Gruppe ist. Benutzen Sie x^{*-1}, um das Inverse bezüglich $(G, *)$ auszudrücken.

Aufgabe 4: Gruppenenen

Gegeben sei $G = \{0, 1, 2, \ldots 6\}$. Seien $a,\ b \in G$, dann definieren wir zwei neue Operationen: $a \oplus b := (a + b) \bmod 7$ und $a \otimes b := (a \cdot b) \bmod 7$.

Zeigen Sie:

a) $(G, \oplus)$ ist eine Gruppe.

b) Was ist das Inverse zu 2, 3 und 4 in $(G, \oplus)$?

c) $(G^*, \otimes)$ ist eine Gruppe, mit $G^* = G \setminus \{0\}$.

d) Was ist das Inverse zu 2, 3 und 4 in $(G^*, \otimes)$?

Aufgabe 5: Gruppenenenen

Betrachten Sie die Kleinsche Vierergruppe K_4 und die Gruppe $C_2 \times C_2$.

a) Geben Sie die Verknüpfungstafeln dieser beiden Gruppen an.

b) Geben Sie einen Isomorphismus $K_4 \to C_2 \times C_2$ an, und argumentieren Sie anhand der Verknüpfungstafeln, dass es sich um einen Isomorphismus handelt.

Aufgabe 6: $\star$ Gruppenenenenen

Seien G, H Gruppen, $f : G \to H$ Homomorphismus. Definiere den Kern von f durch $\ker(f) = \{g \in G | f(g) = e\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\ker(f)$ eine Untergruppe von G ist.

b) Zeigen Sie, dass $\ker(f) = \{e\}$ genau dann, wenn f injektiv ist.

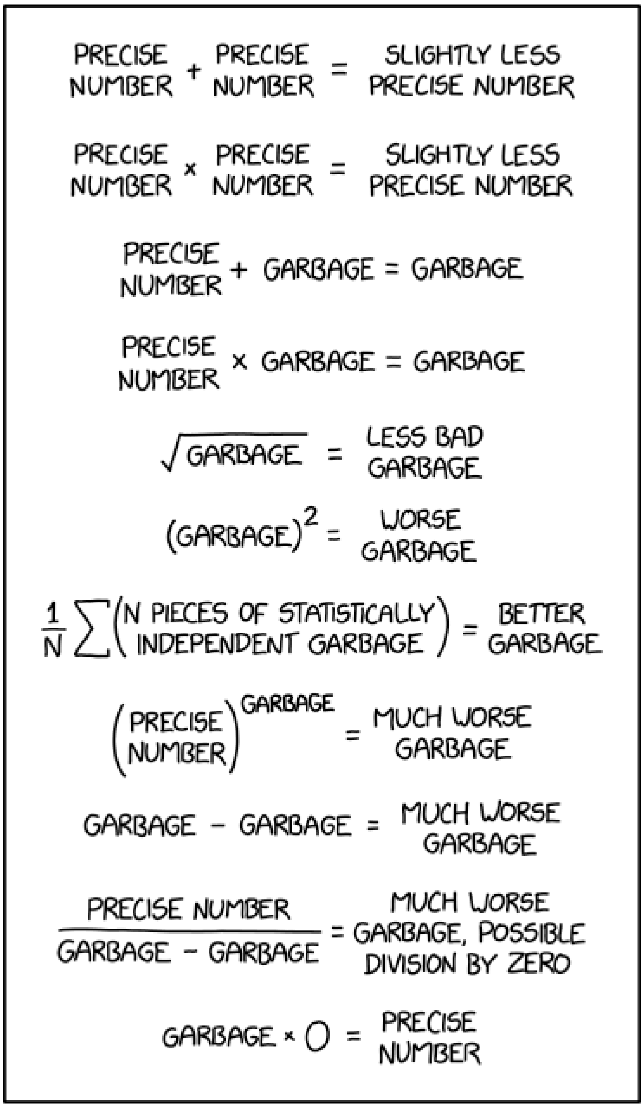

Abbildung 1: xkcd 2295: **Garbage Math** – `xkcd.com/2295/`