Universität Bonn
Institut für Informatik

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
14. September 2022

Übungszettel 8

Aufgabe 1: Vollständige Induktionen des Tages

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

Erinnerung

Menge M, Verknüpfung $\circ$, neutrales Element $e \in M$.
Magma + Assoziativ $\rightarrow$ Halbgruppe
Halbgruppe + $e \rightarrow$ Monoid
Monoid + Inverses $\rightarrow$ Gruppe
Gruppe + Kommutativ $\rightarrow$ abelsche Gruppe

Menge R, Verknüpfung $+$ mit $e_+ = 0$, Verknüpfung $\cdot$ mit $e_\cdot = 1$.
$(R, +)$ abelsche Gruppe, $(R, \cdot)$ kommutativer Monoid, Distributivgesetz gilt $\rightarrow$ Ring
Ring + nullteilerfrei $\rightarrow$ Integritätsbereich
Ring + $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe $\rightarrow$ Körper

Aufgabe 2: Ringe

Zeigen Sie, dass in jedem Ring gilt:

a) $a * 0 = 0$
Tipp: Addiere auf beiden Seite $a * 0$.

b) $-(ab) = a * (-b)$
Tipp: Addiere auf beiden Seite $a * b$.

Aufgabe 3: $\star$ Primzahlen in $\mathbb{Z}$

a) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 2$ ist genau dann Integritätsbereich (nullteilerfrei), wenn n eine Primzahl ist.

b) Folgern Sie daraus mithilfe der Miniversion vom „Kleinen Satz von Wedderburn": $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 2$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 4: Polynomring

a) Überprüfen Sie, dass der reelle Polynomring $R[X]$ nullteilerfrei ist.
Tipp: Wenn es zwei Polynome f, g gibt, dann existiert ein x, sodass $f(x) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$. Was bedeutet das für $f * g$?

b) Zeigen Sie, dass der reelle Polynomring $R[X]$ kein Körper ist.
Tipp: Betrachte das Polynom $f(x) = x$. Was passiert mit dem Grad von f, wenn man ein weiteres Polynom an f dranmultipliziert?

c) Widerspricht Ihre Lösung von b) dem Mini-Wedderburn?

Aufgabe 5: Monoide

Sei X eine beliebige, aber feste Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge davon. Zeigen Sie: $\mathcal{P}(X)$ mit Schnitt ($\cap$) als Verknüpfung ist ein Monoid.

Aufgabe 6: Körper

Zeigen Sie, dass die Menge $\{a + \sqrt{2} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ein Körper ist.
Tipp: falls Sie mit dem Beweis für das inverse Element der Multiplikation Schwierigkeiten haben, versuchen Sie es mal mit $(a + b\sqrt{2})^{-1} = a/(a^2 - 2b^2) - b\sqrt{2}/(a^2 - 2b^2)$.