

Übungszettel 4

Aufgabe 1: Beweise mit Mengen

Seien A_1, A_2, B_1 und B_2 Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Wenn $A_1 \subseteq B_1$ und $A_2 \subseteq B_2$ gilt, dann gilt auch $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$.
- Aus $A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$ folgt nicht $A_1 \subseteq B_1$ oder $A_2 \subseteq B_2$.

Aufgabe 2: Fehlerhafter Beweis

Begründen Sie, warum der folgende Beweis nicht korrekt ist:

$$5 = \sqrt{25} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$$

Aufgabe 3: Fehlerhafter Beweis die Zweite

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, warum der folgende Beweis nicht korrekt ist:

$$\begin{aligned} & a &= & b \\ \Leftrightarrow & a^2 &= & a \cdot b \\ \Leftrightarrow & a^2 - b^2 &= & a \cdot b - b^2 \\ \Leftrightarrow & (a + b) \cdot (a - b) &= & b \cdot (a - b) \\ \Leftrightarrow & a + b &= & b \\ \Leftrightarrow & 2b &= & b & , \text{ da } a = b \text{ können wir } a + b = 2b \text{ schreiben} \\ \Leftrightarrow & 2 &= & 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Beweise

Beweisen Sie folgende Aussagen mit einem direktem Beweis. Achten Sie bitte auf korrekte schriftliche Form (Was ist gegeben? Was ist zu zeigen?)

- Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist immer durch 3 teilbar.
- Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.
- Seien $x, y \in \mathbb{R}$. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ gilt nur, falls $x = 0$ oder $y = 0$.
- Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Das Maximum zweier Zahlen wird mit $\max(x, y)$ bezeichnet. Es gilt, dass $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |y - x|)$. *Tipp: Versuche es mit einer Fallunterscheidung*

Aufgabe 5: Widerspruchsbeweise

- Beweisen Sie durch Widerspruch: Es existiert keine kleinste positive rationale Zahl.
-

Wenn ihr schon fertig seid:

5 ★ Widerspruchsbeweise

- Zeigen Sie per Widerspruch: Ist eine rationale Zahl q keine Ganzzahl, dann ist auch q^2 keine Ganzzahl.

- c) Folgern Sie aus b): Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist n keine Quadratzahl, dann ist \sqrt{n} irrational.

6 ★ Schachbrett

Man nehme ein gewöhnliches 8×8 Schachbrett, wobei jedoch die obere linke und die untere rechte Ecke entfernt wurden. Die Ausrichtung des Schachbretts (unten links ist weiß oder schwarz) ist dabei irrelevant.

Beweisen oder widerlegen Sie: Man kann das verbleibende Brett mit 31 zwei-Felder-großen Steinchen (2×1 : $\square\square$) so belegen, dass alle Felder bedeckt ist.