Universität Bonn
Institut für Informatik

Übungszettel 5

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
9. September 2022

Vollständige Induktion I - Die dunkle Bedrohung

`Beispielaufgabe`

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:
$4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

Vollständige Induktion II - Angriff der Mathematiker

Schreiben Sie die folgenden Summen und Produkte mit $\sum$ und $\prod$ -Schreibweise. Beweisen Sie anschließend mittels vollständiger Induktion die folgenden Gleichungen.
Für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

b) $1 + \left(\frac{2^0}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \ldots + \frac{2^{2(n-1)}}{3^n}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

Episode III - Die Rache der Nerds

Für Ihr Nebenfach Anthropolgie sind Sie in ein kleines, abgeschiedenes Dorf gereist.

Das Dorf ist sehr traditionell: Das Wort der Dorfältesten ist Gesetz, jeder legt Wert auf öffentliches Ansehen, es gibt viele hetero Ehepaare und viele Ehemänner gehen ihren Frauen fremd.

Die Männer sind aber sehr geschickt, weshalb nie eine Frau bemerkt, ob ihr eigener Mann fremdgeht. Sehr wohl weiß aber jede Frau aus der Gerüchteküche, welche anderen Männer (außer ihrem eigenen) fremdgehen. Jedoch ist die Sorge vor Gesichtsverlust so hoch, dass nie eine Frau einer anderen erzählen würde, ob deren Mann fremdgeht.

Das Fremdgehen nimmt so besorgniserregende Züge an, dass eines Tages die Dorfälteste ein Machtwort spricht und folgendes Dekret erlässt: „In unserem Dorf gibt es Männer, die fremdgehen. Wenn eine Frau zu der Erkenntnis gelangt, dass ihr Mann fremdgeht, so bringe sie ihn in der darauf folgenden Nacht um.“

36 Nächte lang geschieht nichts. Aber in der 37. Nacht werden alle 37 ehebrechenden Männer von ihren Frauen umgebracht.

Sie haben beobachtet, dass alle Frauen aus diesem Dorf ein ausgezeichnetes logisches Gespür besitzen und die Dekrete der Dorfältesten stets respektieren. Können Sie das Geschehen erklären?

Vollständige Induktion IV - Eine neue Hoffnung

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Teilbarkeitsregeln.
Für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $n^2 + n$ ist durch 2 teilbar.

b) $2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar.

c) $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar.

Vollständige Induktion V - Das Institut schlägt zurück

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für $4 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt: $n! > 2^n$.

b) Für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 - 2n - 1 > 0$.

$\star$ Vollständige Induktion VI - Die Rückkehr der Informatiker

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion (Nehmen Sie an, dass $n \in \mathbb{N}$):

a) Für eine endliche Menge M hat deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Mächtigkeit $2^{|M|}$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

c) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

d) $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, falls $n \geq 2$.

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$