

Übungszettel 7

Aufgabe 1: Vollständige Induktion des Tages

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.
- $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$, für $n \geq 3$

Aufgabe 2: Funktionen I

Zeigen oder widerlegen Sie ob die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.

Bsp.) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto z + 1$
- $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, q \mapsto 2 \cdot q$
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z^5$
- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Aufgabe 3: Beweise mit Relationen

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert keine binäre Relation R auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die sowohl reflexiv, transitiv, symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

Wenn ihr schon fertig seid

Aufgabe 4: ★ Funktionen II

Seien A, B nichtleere endliche Mengen mit $|A| = |B|$. Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (*Gilt nur für diesen speziellen Fall!*):

- f ist injektiv
- f ist surjektiv
- f ist bijektiv

Aufgabe 5: ★ Funktionen III

Zeigen oder widerlegen Sie ob die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.

- $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
- Sei $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $f : M \rightarrow M$ mit $x \mapsto (2x) \bmod 5$.
- Zeigen Sie, dass eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ existiert.