Übungszettel 8

Aufgabe 1: Vollständige Induktionen des Tages

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

Aufgabe 2: Gruppen

Gegeben sei $G = \{a, b, c\}$ und die Verknüpfung $\circ$ gegeben durch folgende Verknüpfungstafel:

$\circ$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist. Gehen Sie dazu die Gruppenaxiome durch und überprüfen Sie diese. Schreiben Sie dabei zuerst formal auf, was Sie zeigen sollen.

Tipp: lösen Sie b) als letztes.

a) $(G, \circ)$ ist abgeschlossen.

b) $(G, \circ)$ ist assoziativ.

c) $(G, \circ)$ hat ein neutrales Element. Welches?

d) $(G, \circ)$ hat zu jedem Element ein Inverses.

e) $(G, \circ)$ ist kommutativ.

Aufgabe 3: Gruppenen

Gegeben sei $G = \{0, 1, 2, \ldots 6\}$. Seien a, $b \in G$, dann definieren wir zwei neue Operationen: $a \oplus b := (a + b) \bmod 7$ und $a \otimes b := (a \cdot b) \bmod 7$.

a) Zeigen Sie: $(G, \oplus)$ ist eine Gruppe.

b) Was ist das Inverse zu 2, 3 und 4 in $(G, \oplus)$?

c) Zeigen Sie: $(G', \otimes)$ ist eine Gruppe, mit $G' = G \setminus \{0\}$.

d) Was ist das Inverse zu 2, 3 und 4 in $(G^*, \otimes)$?

Aufgabe 4: Gruppenenen

Sei $(G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie die folgenden Fakten:

a) G hat genau ein neutrales Element. (Tipp: Widerspruchsbeweis)

b) Für jedes $x \in G$ gibt es genau ein $y \in G$, sodass $x \cdot y = e$.

c) Es gilt für alle $x, y \in G$: $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$, jedoch nicht unbedingt $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. (Tipp: Benutze für den zweiten Teil die D_6 (Spiegel- und Drehgruppe am regelmäßigen Dreieck))

d) Die symmetrische Permutationsgruppe S_3 ist nicht abelsch (Tipp: Benutze Permutationen, die einfach nur zwei Elemente tauschen, sodass die beiden Permutationen genau ein Element gemeinsam haben)

e) Jede S_n für $n \geq 3$ ist nicht abelsch. (Tipp: Kombiniere eine Spiegelung mit einer Drehung anhand eines Bildes).

Wenn ihr schon fertig seid:

Aufgabe 5: $\star$ Gruppenenenen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und sei ein festes $a \in G$ gegeben. Wir definieren eine neue Verknüpfung $x * y = x \circ a \circ y$. Zeigen Sie, dass auch $(G, *)$ eine Gruppe ist. Benutzen Sie x^{*-1}, um das Inverse bezüglich $(G, *)$ auszudrücken.