Universität Bonn
Institut für Informatik

Übungszettel 9

Vorkurs Formale Methoden
Jonas Cremer, Bettina Esser
14. September 2023

Erinnerung

$$\begin{aligned}
\text{Menge } M + \text{Verknüpfung } \circ &\to \text{Magma}\\
\text{Magma} + \text{Assoziativ} &\to \text{Halbgruppe}\\
\text{Halbgruppe} + \text{neutrales Element } e \in M &\to \text{Monoid}\\
\text{Monoid} + \text{Inverse Elemente} &\to \text{Gruppe}\\
\text{Gruppe} + \text{Kommutativ} &\to \text{abelsche Gruppe}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Menge } R, \text{ Verknüpfung } + \text{ mit } e_+ = 0, \text{ Verknüpfung } \cdot \text{ mit } e_\cdot = 1 &\\
(R,+) \text{ abelsche Gruppe} + (R,\cdot) \text{ kommutativer Monoid} + \text{Distributiv} &\to \text{Ring}\\
\text{Ring} + \text{nullteilerfrei} + 0 \neq 1 &\to \text{Integritätsbereich}\\
\text{Ring} + (R \setminus \{0\}, \cdot) \text{ ist abelsche Gruppe} &\to \text{Körper}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1: Ringe

In der Vorlesung haben Sie bereits den Beweis gesehen, dass in jedem Ring $0 * a = 0$ gilt.

Zeigen Sie nun selbst, dass in jedem Ring gilt:

a) $-(ab) = a * (-b)$
Tipp: Addiere auf beiden Seite $a * b$.

b) $-1 * a = -a$

Aufgabe 2: Monoide

Sei X eine beliebige, aber feste Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge davon. Zeigen Sie: $\mathcal{P}(X)$ mit Schnitt ($\cap$) als Verknüpfung ist ein Monoid.

Aufgabe 3: Primzahlen in $\mathbb{Z}$

a) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 2$ ist genau dann Integritätsbereich (nullteilerfrei), wenn n eine Primzahl ist.

b) Folgern Sie daraus mithilfe der Miniversion vom „Kleinen Satz von Wedderburn": $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 2$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 4: ⋆ Vollständige Induktionen des Tages

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$

Aufgabe 5: ⋆ Körper

Zeigen Sie, dass die Menge $\{a + \sqrt{2} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ein Körper ist.
Tipp: falls Sie mit dem Beweis für das inverse Element der Multiplikation Schwierigkeiten haben, versuchen Sie es mal mit $(a + b\sqrt{2})^{-1} = a/(a^2 - 2b^2) - b\sqrt{2}/(a^2 - 2b^2)$.