

Übungszettel 6

Aufgabe 1: Relationen

Seien R und S zwei Relationen auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

- $R := \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$
- $S := \{(1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$

Zeichnen Sie die Graphen der Relationen R , S und $R \cup S$. Sind die Relationen R , S und $R \cup S$ reflexiv, transitiv, symmetrisch?

Aufgabe 2: Relationen II

Sei G die Menge aller eingeschriebenen Bonner Studenten und $R \subseteq G \times G$ eine Relation und seien $(a, b) \in R$.

Nennen Sie jeweils, ob die Relation R folgende Eigenschaften erfüllt: reflexiv, total, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv; ebenso ob R eine Äquivalenzrelation, eine partielle oder totale Ordnung ist.

Bsp. a hat b gestern in der Uni gesehen.

- a ist mit b in direkter Linie verwandt.
- a und b trinken gerne Wein.
- a wohnt im Studentenwohnheim unter b .
- a ist mit b befreundet.
- a kennt b .
- a hat sich im gleichen Jahr oder später als b eingeschrieben.
- a 's Matrikelnummer ist nicht kleiner als b 's.

Aufgabe 3: Äquivalenzrelationen

- Nennen und erklären Sie alle notwendigen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.
- Ist $R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (3, 1)\}$ auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4\}$ eine Äquivalenzrelation?
- Beweisen Sie, dass “=” eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} ist.

Wenn ihr schon fertig seid

Aufgabe 4: ★ Vollständige Induktion des Tages

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Aufgabe 5: ★ Beweise mit Relationen

- a) Beweisen oder widerlegen Sie: Seien A und B zwei partielle Ordnungen auf M , dann ist $A \cap B$ ebenfalls eine partielle Ordnung.
Tipp: Rufen Sie sich die Definition von partiellen Ordnungen ins Gedächtnis und gehen Sie die Kriterien einzeln durch.
- b) Beweisen oder widerlegen Sie: Seien A und B zwei partielle Ordnungen auf M , dann ist $A \cup B$ ebenfalls eine partielle Ordnung.
Tipp: Versuchen Sie, ein Gegenbeispiel zu finden.

Aufgabe 6: ★ Rätsel des Tages - Zahlenreihen

- a) Die Zahlenreihe beginnt mit einer 3. Jede Zahl der Folge ist um 1 größer als die Hälfte der nächsten Zahl. Wie lautet die fünfte Zahl?
- b) Wie lautet die nächste Zahl in dieser Zahlenreihe: 2 – 5 – 10 – 17 – 28 – ?
- c) Wie lautet die nächste Zahl in dieser Zahlenreihe: 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – ?

Und noch ein paar Buchstabenreihen:

- d) Welcher Buchstabe folgt als nächstes in dieser Reihe: E – Z – D – V – F – ?
- e) Welcher Buchstabe folgt als nächstes in dieser Reihe: M – D – M – D – F – ?