Universität Bonn
Institut für Informatik

Vorkurs Formale Methoden
Michael Kaibel, Bettina Esser
4. September 2024

Übungszettel 3

Aufgabe 1: Mengen

Schreiben Sie explizit alle x, für die die folgende Aussage gilt, in eine Menge:

) `Beispiel` $x \in \mathbb{N} : x^2 = 1$

a) $x \in \mathbb{N} : x < 7$

b) $x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$

c) $x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = 1$

d) $\star$ $x \in \mathbb{Z} : x < 200 \wedge \exists y \in \mathbb{Z} : y^2 = x$

Aufgabe 2: Operatoren auf Mengen

Es sind folgende Mengen gegeben: $M_1 := \{1, 2\}$, $M_2 := \{2, 3\}$, $M_3 := \{1, 3, 5\}$, $M_4 := \{a, b, c\}$ und $M_5 := \{A, B, C\}$. Bestimmen Sie:

a) $M_1 \cup M_2$

b) $M_2 \cap M_3$

c) $\bigcup_{i=1}^{5} M_i$

d) $M_2 \setminus M_1$

e) $\star$ $\bigcap_{i=1}^{5} M_i$

f) $\star$ $M_4 \setminus M_5$

Aufgabe 3: Operationen auf Mengen

Gegeben sind Mengen $C = \{1, 2, 6\}$ und $D := \{a, b, c\}$. Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

a) $C \times D$

b) $\mathcal{P}(C)$

c) $D \cup \mathcal{P}(D)$

Aufgabe 4: Beweise

Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie folgende Gesetze:

a) $A \cup A = A$ (Idempotenz)

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)

c) $\star$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivität)

d) $\star$ $A \cup (A \cap B) = A$ (Absorption)

e) $\star$ Beweisen oder widerlegen Sie: für alle A und B gilt: $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Wenn ihr schon fertig seid:

Aufgabe 5: 5 ⋆ Operationen mal andersrum

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 5\}$ und $C = \{3, 5\}$. Stellen Sie die folgenden Mengen als Verknüpfung der Mengen A, B und C dar. Benutzen Sie dazu Vereinigung, Schnitt, Differenz, kartesisches Produkt und/oder Potenzmengenbildung.

a) $\{(1, 5), (3, 2), (3, 5)\}$

b) $\{(\{\emptyset\}, 1), (\{\emptyset\}, 5)\}$

c) $\{\{2\}, \{1, 2\}\}$

6 Rätsel ⋆ Sind Skrumpfs wirklich alle Nocks?

Jeder gebildete Mensch weiß inzwischen, dass Frills, Skrumpfs und Glops offensichtlich nur Formen von Nocks sind. Es seht auch fest, dass Skrumpfs Glops und Nocks sind. Trotzdem gibt es da eine Schwierigkeit. Neuere Forschungen haben ergeben, dass es Glops gibt, die weder Skrumpfs noch Brammels noch Frills sind. Außerdem gibt es Skrumpfs, die weder Brammels noch Frills sind. Und wir müssen zugeben, dass einige Frills Glops sind — ebenso wie alle Skrumpfs und sogar einige Brammels. Da wir nun mehr über die Brammels wissen — einige von ihnen sind Skrumpfs, einige Glops und einige leider sowohl Frills als auch Skrumpfs — stelle ich Ihnen einige wichtige Fragen, die richtig zu beantworten sind.

a) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm der Mengen. Nennen Sie die Mengen F, S, G, N und B.

b) Kann es im Universum ein so bedauernswertes Geschöpf geben, das ehrlich zugeben muss, Frill, Nock, Skrumpf, Glop und Brammel zu sein?

c) Was die Brammels betrifft, die keine Nocks sind: Können sie Glops sein?

d) Wenn ein Frill ein Skrumpf ist, ist er auch ein Glop und kann er ein Brammel sein?