Übungszettel 5

Vollständige Induktion I - Die dunkle Bedrohung

`Beispielaufgabe`

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:
$4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

Vollständige Induktion II - Angriff der Mathematiker

Schreiben Sie die folgenden Summen und Produkte mit $\sum$ und $\prod$ -Schreibweise. Beweisen Sie anschließend mittels vollständiger Induktion die folgenden Gleichungen.
Für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

b) $1 + \left(\frac{2^0}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \ldots + \frac{2^{2(n-1)}}{3^n}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n(n+1)}$

Episode III - Die Rache der Nerds

Der unbeaufsichtigte Teenager Bash mit seinem treuen Taschemon Pukachi will alle großen Arenen bezwingen. Sein Pukachi ist aktuell auf Level 1 und wegen Budget-Kürzungen kann jede Arena nur ein Taschemon unterhalten. In der n-ten Arena hat dieses Taschemon Level 2^{n-1}.
Da Bash sich auf den Kampf vorbereiten kann, kann er gegen jedes Taschemon gewinnen, dass ein Level $\leq$ dem Level seines Pukachi hat. Ist sein Pukachi auf einem niedrigeren Level, so wird Bash definitiv verlieren. Gewinnt Pukachi gegen ein Taschemon, so addiert es dessen Level auf sein eigenes auf.
Wenn Bash die Arenen in der Reihenfolge $1, 2, 3, ...$ aufsucht, ist sein Pukachi dann für die n-te Arena auf einem ausreichend hohen Level, um die Arena zu bezwingen?

a) Gehen Sie die ersten $3-4$ Arenen händisch durch und berechnen Sie, welches Level Pukachi nach jeder Arena hat. Stellen Sie daraus eine Funktion auf, die das Level von Pukachi direkt vor dem Kampf gegen die n-te Arena angibt.

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion. Zeigen Sie auch, dass Pukachi in der n-ten Arena stets ein ausreichend hohes Level hat, um zu gewinnen.

Vollständige Induktion IV - Eine neue Hoffnung

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion folgende Teilbarkeitsregeln.
Für $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $n^2 + n$ ist durch 2 teilbar.

b) $2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar.

c) $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar.

Vollständige Induktion V - Das Institut schlägt zurück

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für $4 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt: $n! > 2^n$.

b) Für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 - 2n - 1 > 0$.

$\star$ Vollständige Induktion VI - Die Rückkehr der Informatiker

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion (Nehmen Sie an, dass $n \in \mathbb{N}$):

a) Für eine endliche Menge M hat deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Mächtigkeit $2^{|M|}$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

c) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

d) $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, falls $n \geq 2$.

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$