Universität Bonn
Institut für Informatik

Übungszettel 6

Aufgabe 1: Relationen

Seien R und S zwei Relationen auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

- $R := \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$
- $S := \{(1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$

Zeichnen Sie die Graphen der Relationen R, S und $R \cup S$. Sind die Relationen R, S und $R \cup S$ reflexiv, transitiv, symmetrisch?

Aufgabe 2: Äquivalenzrelationen

a) Nennen und erklären Sie alle notwendigen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

b) Ist $R_1 := \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (3, 1)\}$ auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4\}$ eine Äquivalenzrelation?

c) Beweisen Sie, dass die Relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid |a| = |b|\}$ - also die Relation „haben den gleichen Betrag“ auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3: Relationen II

Sei G die Menge aller eingeschriebenen Bonner Studenten und $R \subseteq G \times G$ eine Relation und seien $(a, b) \in R$.

Nennen Sie jeweils, ob die Relation R folgende Eigenschaften erfüllt: reflexiv, total, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv; ebenso ob R eine Äquivalenzrelation, eine partielle oder totale Ordnung ist.

`Bsp.` $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ hat sich im gleichen Jahr oder später als } b \text{ eingeschrieben.}\}$

a) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ ist mit } b \text{ in direkter Linie verwandt.}\}$ *(direkte Linie heißt z.B. Eltern-Kinder, Großeltern-Enkel, usw. aber nicht z.B. Tante-Neffe)*

b) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ hat im gleichen Monat Geburtstag wie } b.\}$

c) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ wohnt im Studentenwohnheim unter } b.\}$

d) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ ist mit } b \text{ befreundet.}\}$

e) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ kennt } b.\}$

f) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a\text{'s Matrikelnummer ist nicht kleiner als } b\text{'s.}\}$

g) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ hat } b \text{ gestern in der Uni gesehen.}\}$

h) $R = \{(a, b) \in G \times G \mid a \text{ und } b \text{ trinken beide gerne Wein.}\}$

Einige Antworten hängen natürlich von der Definition ab. Wir haben uns dafür entschieden, dass man mit sich selbst verwandt ist, sich selber sehen kann, mit sich selbst befreundet sein kann und sich selber kennt.

Wenn ihr schon fertig seid

Aufgabe 4: ⋆ Vollständige Induktion des Tages

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Aufgabe 5: ⋆ Beweise mit Relationen

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Seien A und B zwei partielle Ordnungen auf M, dann ist $A \cap B$ ebenfalls eine partielle Ordnung.
Tipp: Rufen Sie sich die Definition von partiellen Ordnungen ins Gedächtnis und gehen Sie die Kriterien einzeln durch.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Seien A und B zwei partielle Ordnungen auf M, dann ist $A \cup B$ ebenfalls eine partielle Ordnung.
Tipp: Versuchen Sie, ein Gegenbeispiel zu finden.