Universität Bonn
Institut für Informatik

Übungszettel 7

Vorkurs Formale Methoden
Michael Kaibel, Bettina Esser
10. September 2024

Aufgabe 1: Vollständige Induktion des Tages

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

Notation: Für a ist durch b teilbar schreiben wir auch $b \mid a$ (gesprochen „b teilt a“).

Tipp: Manchmal muss man Induktionen ineinander schachteln („doppelte Induktion“). Versuchen Sie erstmal mit einer Induktion zu beweisen, dass $3 \mid 4^n + 5$ gilt (womit auch $9 \mid 3(4^n + 5)$ gilt) und nutzen Sie dieses Wissen dann in Ihrer Induktion für die eigentliche Aufgabe.

b) $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$, für $n \geq 3$

Aufgabe 2: Funktionen I

Zeigen oder widerlegen Sie ob die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.

`Bsp.)` $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z + 1$

b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ q \mapsto 2 \cdot q$

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ z \mapsto z^5$

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

Aufgabe 3: Beweise mit Relationen

Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert keine binäre Relation R auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die sowohl reflexiv, transitiv, symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

Wenn ihr schon fertig seid

Aufgabe 4: $\star$ Funktionen II

Seien A, B nichtleere endliche Mengen mit $|A| = |B|$. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen *(Gilt nur für diesen speziellen Fall!)*:

- f ist injektiv
- f ist surjektiv
- f ist bijektiv

Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass bei gleicher Mächtigkeit von A und B (die dafür endlich sein müssen!) jede injektive Funktion auch surjektiv (und bijektiv) ist und umgekehrt.

Aufgabe 5: ⋆ Funktionen III

Zeigen oder widerlegen Sie ob die folgenden Funktionen, injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind.

a) $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

b) Sei $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $f : M \to M$ mit $x \mapsto (2x) \bmod 5$.

c) Zeigen Sie, dass eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ existiert.