Universität Bonn
Institut für Informatik

Vorkurs Formale Methoden
Michael Kaibel, Bettina Esser
12. September 2024

Übungszettel 9

Erinnerung

Menge M + Verknüpfung $\circ$	$\rightarrow$	Magma
Magma + Assoziativ	$\rightarrow$	Halbgruppe
Halbgruppe + neutrales Element $e \in M$	$\rightarrow$	Monoid
Monoid + Inverse Elemente	$\rightarrow$	Gruppe
Gruppe + Kommutativ	$\rightarrow$	abelsche Gruppe

Menge R, Verknüpfung $+$ mit $e_+ = 0$ und Verknüpfung $\cdot$		
$(R, +)$ abelsche Gruppe + $(R, \cdot)$ Halbgruppe + Distributiv	$\rightarrow$	Ring
Ring R + $(R, \cdot)$ Monoid mit neutralen Element $e_\cdot = 1$	$\rightarrow$	Ring mit 1
Ring R + $(R, \cdot)$ kommutativ	$\rightarrow$	kommutativer Ring (ggf. mit 1)
Kommutativer Ring mit 1 + nullteilerfrei + $0 \neq 1$	$\rightarrow$	Integritätsbereich
Ring + $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe	$\rightarrow$	Körper

---

Aufgabe 1: Ringe

In der Vorlesung haben Sie bereits den Beweis gesehen, dass in jedem Ring $0 * a = 0$ gilt.

Zeigen Sie nun selbst, dass in jedem Ring gilt:

a) $-(ab) = a * (-b)$
Tipp: Addiere auf beiden Seite $a * b$.

b) $-1 * a = -a$

Aufgabe 2: Monoide

Sei X eine beliebige, aber feste Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge davon. Zeigen Sie: $\mathcal{P}(X)$ mit Schnitt ($\cap$) als Verknüpfung ist ein Monoid.

Aufgabe 3: Primzahlen in $\mathbb{Z}$

a) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 2$ ist genau dann Integritätsbereich (nullteilerfrei), wenn n eine Primzahl ist.

b) Folgern Sie daraus mithilfe der Miniversion vom „Kleinen Satz von Wedderburn": $\mathbb{Z}_n$ mit $n \geq 2$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 4: $\star$ Vollständige Induktionen des Tages

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$

Aufgabe 5: $\star$ Körper

Zeigen Sie, dass die Menge $\{a + \sqrt{2} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ein Körper ist.
Tipp: falls Sie mit dem Beweis für das inverse Element der Multiplikation Schwierigkeiten haben, versuchen Sie es mal mit $(a + b\sqrt{2})^{-1} = a/(a^2 - 2b^2) - b\sqrt{2}/(a^2 - 2b^2)$.