# Vorkurs
# Formale Methoden der Informatik

Bettina Esser und Jonas Cremer

2. September bis 13. September 2024, Universität Bonn

Informatik V

# Ort der Vorlesung

- Der Vorkurs findet statt von Montag, dem 2.09., bis Freitag, den 13.9., jeweils von 11h–13h. Der Beginn ist uni-üblich c.t. d.h. 11:15 fortan.
- Ort des Vorkurses ist der Hörsaal IV in der Meckenheimer Allee 176, 53115 Bonn.
- Zur zweiten Woche ändert sich der Ort des Hörsaal, dazu Ende der Woche mehr
- Der einfachste Zugang zu den Hörsälen ist über den Eingang zum Hof im Katzenburgweg 1a.

# Übungsgruppen

Die Übungen sind unterteilt in 8 Gruppen und finden von 13h–15h im Institut für Informatik statt.

Die Zugerhörigkeit zu Übungsgruppen wird nach der Vorlesung geklärt.

Unsere Tutoren dieses Jahr sind:
Bastian Stricker,
Emilia Groß-Hardt,
Jonathan Kunecke,
Kolja von der Twer,
Moritz Froese,
Nico Stern,
Rami Kalle,
Sebastian Schaaf

# Ziele des Vorkurses

- Inhalte einführen, die im Studium noch wichtig werden
- Mathematische Denkweise nahebringen
- Einen Eindruck vom Studium vermitteln
- Lern- und Arbeitsmethoden kennenlernen
- Die ersten Wochen des „echten" Studiums etwas auffangen
- Andere Erstis kennenlernen, Lerngruppen bilden, Freundschaften knüpfen
- Ernsthaft, Studium alleine macht keinen Spaß!
- Keine Angst! Alles, was ihr hier nicht versteht, werdet ihr im Studium erneut lernen.

# Nützliche Links

- Übungszettel, Übungsgruppen, Organisatorisches zum Vorkurs: https://vorkurs.be-sser.de
- Eure Fachschaft: https://fachschaft.info
- Institut für Informatik: https://www.informatik.uni-bonn.de/de

# Warum eigentlich so viel Mathe

# Terme, Gleichung, Ungleichung

Wir wollen uns präzise mathematische Sprache aneignen, damit die Formulierung von Fakten sowie deren Richtigkeitsbegründungen (Beweise) unmissverständlich als korrekt oder inkorrekt bewertet werden können.

- Ein Term ist ein wohlgeformter Ausdruck bestehend aus Zahlen, Variablen, Klammern und Rechenoperationen.
- Eine Gleichung ist ein Ausdruck der Form $A = B$ für zwei Terme $A$ und $B$.
- Eine Ungleichung dementsprechend $A < B$, $A > B$, $A \leq B$, etc.

**Theorem (Satz des Pythagoras)**

*Seien $a, b, c$ die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse $c$. Dann gilt:* $a^2 + b^2 = c^2$.

# Rechengesetze in $\mathbb{R}$

Vorab seien einige Rechengesetze wiederholt, die Sie aus $\mathbb{R}$ kennen.

Seien $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
(a+b)+c &= a+(b+c), && \text{(Assoziativität der Addition)}\\
(a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c), && \text{(Assoziativität der Multiplikation)}\\
a+b &= b+a, && \text{(Kommutativität der Addition)}\\
a\cdot b &= b\cdot a, && \text{(Kommutativität der Multiplikation)}\\
(a+b)\cdot c &= a\cdot c+b\cdot c. && \text{(Distributivität)}
\end{aligned}$$

# Summen und Produktschreibweise

Lange Summen werden in mathematischen Formeln oft verkürzt mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ und einer *Indexvariable* beschrieben.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\sum_{i=1}^{10} i,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{2^i}.$$

Wichtigkeit von Klammern: $\sum_{i=0}^{n}(i-1) \neq \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)-1$

Für Produkte gibt es das gleich funktionierende Produktzeichen

$$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = \prod_{i=1}^{6} i$$

# Grundwissen

# Betrag

**Definition (Betrag)**

Der Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

# Betrag

## Definition (Betrag)

Der Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

## Beispiel

$$|4| = 4$$

$$|-2.718| = 2.718$$

$$|x| = \pi \Leftrightarrow x = \pm\pi$$

$|x+2| = 1$ gilt für die Werte -1 und -3.

# Betrag: Gesetze

Für den Betrag gelten folgende Gesetze:

Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|a| &\geq 0, && \text{(Positivität)}\\
|a \cdot b| &= |a| \cdot |b|, && \text{(Homogenität)}\\
|a + b| &\leq |a| + |b|. && \text{(Dreiecksungleichung)}
\end{aligned}
$$

**Definition (Potenzen für nicht-negative ganzzahlige Exponenten)**

Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die $n$-te Potenz von $a$ ist definiert als

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = \prod_{i=1}^{n} a.$$

# Potenzen

**Definition (Potenzen für nicht-negative ganzzahlige Exponenten)**

Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die $n$-te Potenz von $a$ ist definiert als

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = \prod_{i=1}^{n} a.$$

Wir nennen $a$ die *Basis* und $n$ den *Exponenten*. Wenn $n = 0$, dann steht $1$ gefolgt von 0 Multiplikationen mit $a$, also ist $a^0 = 1$. Weiterhin ist $0^n = 0$, für $n > 0$. Der Wert von $0^0$ ist im allgemeinen nicht definiert.

# Potenzen

**Definition (Potenzen für nicht-negative ganzzahlige Exponenten)**

Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die $n$-te Potenz von $a$ ist definiert als

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = \prod_{i=1}^{n} a.$$

Wir nennen $a$ die *Basis* und $n$ den *Exponenten*. Wenn $n = 0$, dann steht $1$ gefolgt von 0 Multiplikationen mit $a$, also ist $a^0 = 1$. Weiterhin ist $0^n = 0$, für $n > 0$. Der Wert von $0^0$ ist im allgemeinen nicht definiert.

Das Potenzieren bindet stärker als die Multiplikation, es gilt also $ab^c = a(b^c)$. Die Operation ist nicht kommutativ, im Allgemeinen gilt also $a^b \neq b^a$. Potenzen werden von rechts ausgewertet, also $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

# Potenzen: Gesetze

Daraus lassen sich sofort einige Gesetze ableiten.

Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$ und $m$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

# Potenzen: Gesetze

Daraus lassen sich sofort einige Gesetze ableiten.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

# Potenzen: Gesetze

Daraus lassen sich sofort einige Gesetze ableiten.

Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$ und $m$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \text{für } b \neq 0$$

# Potenzen: Gesetze

Daraus lassen sich sofort einige Gesetze ableiten.

Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$ und $m$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\
a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n && \text{für } b \neq 0 \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} && \text{für } a \neq 0, n \geq m
\end{aligned}
$$

# Potenzen: Gesetze

Daraus lassen sich sofort einige Gesetze ableiten.

Seien $a$, $b \in \mathbb{R}$ und $m$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\
a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n && \text{für } b \neq 0 \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} && \text{für } a \neq 0, n \geq m \\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m}
\end{aligned}$$

# Potenzen für ganzzahlige Exponenten

**Definition (Potenzen für ganzzahlige Exponenten)**

Für den Fall $n - m = -1$ ergibt sich bei $a \neq 0$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a} =: a^{-1}.$$

Damit erweitern wir den Begriff der Potenz auf ganzzahlige Exponenten.

# Potenzen für ganzzahlige Exponenten

**Definition (Potenzen für ganzzahlige Exponenten)**

Für den Fall $n - m = -1$ ergibt sich bei $a \neq 0$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a} =: a^{-1}.$$

Damit erweitern wir den Begriff der Potenz auf ganzzahlige Exponenten.

Die oben genannten Gesetze gelten dann ohne Einschränkung auch für $n, m \in \mathbb{Z}$.

# Potenzen für ganzzahlige Exponenten

**Definition (Potenzen für ganzzahlige Exponenten)**

Für den Fall $n - m = -1$ ergibt sich bei $a \neq 0$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a} =: a^{-1}.$$

Damit erweitern wir den Begriff der Potenz auf ganzzahlige Exponenten.

Die oben genannten Gesetze gelten dann ohne Einschränkung auch für $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ist $a < 0$, dann ist $a^n$ bei geradzahligem Exponenten $n$ positiv, bei ungeradzahligem Exponenten negativ.

# Potenzen für ganzzahlige Exponenten

**Definition (Potenzen für ganzzahlige Exponenten)**

Für den Fall $n - m = -1$ ergibt sich bei $a \neq 0$:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a} =: a^{-1}.$$

Damit erweitern wir den Begriff der Potenz auf ganzzahlige Exponenten.

Die oben genannten Gesetze gelten dann ohne Einschränkung auch für $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ist $a < 0$, dann ist $a^n$ bei geradzahligem Exponenten $n$ positiv, bei ungeradzahligem Exponenten negativ.

Daraus ergibt sich für $a = -1$ und $n \in \mathbb{Z}$, dass $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n-1} = -1$ ist.

**Definition (Wurzeln für natürliche Exponenten)**

Seien $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Gleichung $x^n = a$ eine eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung in $x = \sqrt[n]{a}$. Damit lässt sich das Wurzelziehen als Umkehrung des Potenzierens auffassen. Wir nennen dies die *$n$-te Wurzel* von $a$. Die Zahl $a$ heißt auch *Radikand*. Ist $n = 2$, sprechen wir von einer *Quadratwurzel*, bei $n = 3$ von einer *Kubikwurzel*. Ist $n$ nicht angegeben, gilt $n = 2$.

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Ziehen der $n$-ten Wurzel wirkt also wie das Potenzieren mit $1/n$, daher schreiben wir auch

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}.$$

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Ziehen der $n$-ten Wurzel wirkt also wie das Potenzieren mit $1/n$, daher schreiben wir auch

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}.$$

Mit dieser Definition können wir aus den Potenzgesetzen direkt die Wurzelgesetze ableiten: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Ziehen der $n$-ten Wurzel wirkt also wie das Potenzieren mit $1/n$, daher schreiben wir auch

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}.$$

Mit dieser Definition können wir aus den Potenzgesetzen direkt die Wurzelgesetze ableiten: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a = (\sqrt[n]{a})^n$$

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Ziehen der $n$-ten Wurzel wirkt also wie das Potenzieren mit $1/n$, daher schreiben wir auch

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}.$$

Mit dieser Definition können wir aus den Potenzgesetzen direkt die Wurzelgesetze ableiten: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a = (\sqrt[n]{a})^n$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Ziehen der $n$-ten Wurzel wirkt also wie das Potenzieren mit $1/n$, daher schreiben wir auch

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}.$$

Mit dieser Definition können wir aus den Potenzgesetzen direkt die Wurzelgesetze ableiten: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a = (\sqrt[n]{a})^n$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \text{für } b \neq 0$$

# Wurzeln: Gesetze

Es gilt $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[n]{1} = 1$ und $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a^n} = a$. Das Ziehen der $n$-ten Wurzel wirkt also wie das Potenzieren mit $1/n$, daher schreiben wir auch

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n}.$$

Mit dieser Definition können wir aus den Potenzgesetzen direkt die Wurzelgesetze ableiten: Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n} \\
\sqrt[n]{a^n} &= a = (\sqrt[n]{a})^n \\
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} \\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} && \text{für } b \neq 0 \\
\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[n \cdot k]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}
\end{aligned}$$

**Definition (Fakultät)**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die *Fakultät* von $n$ (gesprochen "$n$ Fakultät") definiert als:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i.$$

Weiter ist $0! := 1$, was aus der Definition des leeren Produkts folgt.

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die *Fakultät* von $n$ (gesprochen "$n$ Fakultät") definiert als:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i.$$

Weiter ist $0! := 1$, was aus der Definition des leeren Produkts folgt.

## Beispiel

$$6! = \prod_{i=1}^{6} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

# Exponentialfunktion

**Definition (Exponentialfunktion)**

Als *Exponentialfunktion* bezeichnet eine Funktion der Form $x \mapsto a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$.

# Exponentialfunktion

**Definition (Exponentialfunktion)**

Als *Exponentialfunktion* bezeichnet eine Funktion der Form $x \mapsto a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$.

Die *natürliche* Exponentialfunktion ist die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^x$, also die Exponentialfunktion zur Basis $e$, wobei $e$ die Eulersche Zahl $(2.71828\ldots)$ ist. Wir schreiben auch $e^x = \exp(x)$.

# Exponentialfunktion

**Definition (Exponentialfunktion)**

Als *Exponentialfunktion* bezeichnet eine Funktion der Form $x \mapsto a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$.

Die *natürliche* Exponentialfunktion ist die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^x$, also die Exponentialfunktion zur Basis $e$, wobei $e$ die Eulersche Zahl $(2.71828\ldots)$ ist. Wir schreiben auch $e^x = \exp(x)$.

Es gelten die gleichen Gesetze wie wir sie schon gesehen haben, nur liegt jetzt der Fokus auf den Exponenten, nicht auf den Basen.

Man kann zeigen, dass $a^x$ für $a > 1$ und $x \to \infty$ stärker wächst als jede Potenz $x^b$, $b \in \mathbb{R}$. D. h., es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0.$$

# Die natürliche Exponentialfunktion

Man kann $\exp(x)$ auch als unendliche Reihe beschreiben:

$$\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

# Die natürliche Exponentialfunktion

Man kann $\exp(x)$ auch als unendliche Reihe beschreiben:

$$\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Damit können wir den Wert von $e$ “errechnen”, also $e = \exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$.

Die natürlichen Exponentialfunktion $exp(x)$ entspricht ihrer Ableitung $exp(x)$.

# Die natürliche Exponentialfunktion

Man kann $\exp(x)$ auch als unendliche Reihe beschreiben:

$$\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Damit können wir den Wert von $e$ “errechnen”, also $e = \exp(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$.

Die natürlichen Exponentialfunktion $exp(x)$ entspricht ihrer Ableitung $exp(x)$.

Das ist sehr interessant zum Lösen von Differentialgleichungen wie bspw. $f(x) = f'(x)$.
Hierfür ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = a \cdot \exp(x)$ eine Lösung.

# Logarithmus

Die Umkehrung der Exponentialfunktion ist der *Logarithmus*.

**Definition (Logarithmus)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $b \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann hat die Gleichung $b^x = a$ die eindeutige Lösung $x = \log_b a$. Wir nennen $x$ den *Logarithmus* von $a$ zur Basis $b$.

Anschaulich kann man sagen, dass der 10er-Logarithmus einer ganzen Zahl $> 1$ etwa ihrer Länge in Ziffern entspricht.

Genauer gesagt: Sei $n \in \mathbb{N}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ geschrieben, dann braucht es $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$ Ziffern, um $n$ zur Basis $b$ auszuschreiben. Der Logarithmus ist eine sehr langsam wachsende Funktion.

# Logarithmus: Gesetze

Seien weiterhin $c$, $d$, $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $d \neq 1$. Da Exponentialfunktion und Logarithmus voneinander die Umkehrfunktionen sind, gilt:

$$b^{\log_b y} = y = \log_b(b^y).$$

Damit ergeben sich direkt aus den Potenzgesetzen folgende Gesetze für Logarithmen:

$$\begin{aligned}
\log_b(a \cdot c) &= \log_b a + \log_b c, \\
\log_b\left(\frac{a}{c}\right) &= \log_b a - \log_b c, \\
\log_b a &= \frac{\log_d a}{\log_d b}, && (*) \\
\log_b(a^y) &= y \cdot \log_b a.
\end{aligned}$$

# Logarithmus: Anmerkungen

- Ist aus dem Kontext klar, welche Basis gemeint ist, schreiben wir oft statt $\log_b x$ nur $\log x$. In der Informatik verwenden wir oft die Basis $2$ und schreiben dafür auch $\lg x := \log_2 x$.
- In der Mathematik und Physik ist der *natürliche Logarithmus* zur Basis $e$ sehr wichtig und definiert als $\ln x := \log_e x$.
- Logarithmen eines Arguments $x$ zu verschiedenen Basen unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor voneinander, wie man in (*) sieht.

# Verabschiedung

Vielen Dank fürs Zuhören! Vergesst nicht, eine Übungsgruppe zu losen. Sagt eurer Fachschaft „Hallo” von uns!