Vorkurs
Formale Methoden der Informatik

Bettina Esser und Jonas Cremer

4. September bis 15. September 2023, Universität Bonn

Informatik V

Aussagenlogik

Elementare Aussagen

(Elementare) Aussagen können wahr (`wahr`) oder falsch (`falsch`) sein.

Beispiele:

- Es regnet.
- Es gibt Außerirdische.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Komplexere Aussagen bestehen aus logisch verknüften elemntaren Aussagen:

- **Wenn** es regnet, **dann** ist der Boden nass.
- **Wenn** es regnet **und** die Sonne scheint, **dann** gibt es einen Regenbogen.

Negation

Die einfachste Operation ist die *Negation*, oft auch als `NOT` bezeichnet: das Gegenteil einer falschen Aussage ist eine wahre Aussage und ebenso ist das Gegenteil einer wahren Aussage eine falsche Aussage (tertiam non datur). In der Schreibweise der Logik wird für die Negation das Zeichen “$\neg$” verwendet, gesprochen “nicht”. Häufig schreibt man auch $\overline{A}$ statt $\neg A$.

Die Wahrheitstabelle für die Negation sieht folgendermaßen aus:

A	$\neg A$
f	
w	

Negation

Die einfachste Operation ist die *Negation*, oft auch als `NOT` bezeichnet: das Gegenteil einer falschen Aussage ist eine wahre Aussage und ebenso ist das Gegenteil einer wahren Aussage eine falsche Aussage (tertiam non datur). In der Schreibweise der Logik wird für die Negation das Zeichen "$\neg$" verwendet, gesprochen "nicht". Häufig schreibt man auch $\overline{A}$ statt $\neg A$.

Die Wahrheitstabelle für die Negation sieht folgendermaßen aus:

A	$\neg A$
f	w
w	f

Konjunktion

Die *Konjunktion* (auch AND oder “Und”) ist `wahr`, falls *beide* Teilaussagen `wahr` sind; ansonsten ist sie `falsch`. Zum Beispiel bedeutet “die Tür kann geöffnet werden, wenn der Schlüssel gedreht wurde *und* die Klinke gedrückt wurde”, dass eine der beiden Aktionen alleine nicht ausreichend ist. Das mathematische Symbol für AND ist “$\wedge$”.

Die Wahrheitstabelle sieht so aus:

A	B	$A \wedge B$
f	f	
f	w	
w	f	
w	w	

Konjunktion

Die *Konjunktion* (auch `AND` oder "Und") ist `wahr`, falls *beide* Teilaussagen `wahr` sind; ansonsten ist sie `falsch`. Zum Beispiel bedeutet "die Tür kann geöffnet werden, wenn der Schlüssel gedreht wurde *und* die Klinke gedrückt wurde", dass eine der beiden Aktionen alleine nicht ausreichend ist. Das mathematische Symbol für `AND` ist "$\wedge$".

Die Wahrheitstabelle sieht so aus:

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion

Die *Disjunktion* (auch `OR` oder “(inklusives) Oder”) ist `wahr`, falls *mindestens eine* der beiden Teilaussagen `wahr` ist. Beispielsweise sagt der Satz “Ich komme nach Hause, wenn es regnet *oder* dunkel wird” aus, dass einer der beiden Gründe ausreichend ist.

Vorsicht! Unser normalsprachliches “Oder” ist meist ein *exklusives* Oder (siehe unten). Der Satz “Trinkst du Bier *oder* Wein?” bedeutet eben meist nicht, dass man beides möchte.

Das mathematische Symbol für `OR` ist “$\vee$” und dies ist seine Wahrheitstabelle:

A	B	$A \vee B$
f	f	
f	w	
w	f	
w	w	

Disjunktion

Die *Disjunktion* (auch `OR` oder “(inklusives) Oder”) ist `wahr`, falls *mindestens eine* der beiden Teilaussagen `wahr` ist. Beispielsweise sagt der Satz “Ich komme nach Hause, wenn es regnet *oder* dunkel wird” aus, dass einer der beiden Gründe ausreichend ist.

Vorsicht! Unser normalsprachliches “Oder” ist meist ein *exklusives* Oder (siehe unten). Der Satz “Trinkst du Bier *oder* Wein?” bedeutet eben meist nicht, dass man beides möchte.

Das mathematische Symbol für `OR` ist “$\vee$” und dies ist seine Wahrheitstabelle:

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Exklusives Oder

Die *exklusive Oder* (XOR, auch: die Kontravelenz) ist wahr, falls *genau eine* der beiden Teilaussagen wahr ist. Das mathematische Symbol dafür ist nicht eindeutig, wir verwenden hier "$\oplus$". $A \oplus B$ wird ausgesprochen "entweder A oder B" oder einfach "XOR" oder "EXOR".

A	B	$A \oplus B$
f	f	
f	w	
w	f	
w	w	

Exklusives Oder

Die *exklusive Oder* (XOR, auch: die Kontravelenz) ist wahr, falls *genau eine* der beiden Teilaussagen wahr ist. Das mathematische Symbol dafür ist nicht eindeutig, wir verwenden hier "$\oplus$". $A \oplus B$ wird ausgesprochen "entweder A oder B" oder einfach "XOR" oder "EXOR".

A	B	$A \oplus B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Es gilt:

$$A \oplus B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \qquad \text{alternativ:}$$

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B).$$

Implikation

Die *Implikation* oder *Folgerung* ist dann `wahr`, wenn aus der ersten Aussage die zweite folgt. Aus einer falschen Aussage darf sowohl etwas Falsches oder Wahres folgen (*ex falso quodlibet*: jeder Schluss aus Falschem ist zulässig); aus einer wahren Aussage darf aber nur etwas Wahres folgen.

Das Symbol ist "$\Rightarrow$" und dies ist die Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Auch die Implikation lässt sich mit einfacheren Operationen ausdrücken:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B.$$

Implikation

Ich esse Brot	⇒	Ich bin satt	
`falsch`	⇒	`wahr`	`wahr`
`falsch`	⇒	`falsch`	`wahr`
`wahr`	⇒	`wahr`	`wahr`
`wahr`	⇒	`falsch`	`falsch`

“Ich esse Brot” ist z.B. `falsch`, wenn ich Suppe esse!

Die einzige Möglichkeit, das diese Aussage `falsch` ist, ist wenn ich Brot esse und trotzdem *nicht* satt bin. In allen andern Fällen ist die Aussage `wahr`.

Äquivalenz

Als letztes bleibt noch die *Äquivalenz*. Das mathematische Symbol ist “$\Leftrightarrow$” und man sagt: “A genau dann, wenn B”, “A dann und nur dann, wenn B” oder “A ist äquivalent zu B”

Es bedeutet, dass beide Teilaussagen immer zur gleichen Zeit `wahr` oder `falsch` sind. Die Wahrheitstabelle dazu ist:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
`f`	`f`	
`f`	`w`	
`w`	`f`	
`w`	`w`	

Äquivalenz

Als letztes bleibt noch die *Äquivalenz*. Das mathematische Symbol ist "$\Leftrightarrow$" und man sagt: "A genau dann, wenn B", "A dann und nur dann, wenn B" oder "A ist äquivalent zu B"

Es bedeutet, dass beide Teilaussagen immer zur gleichen Zeit `wahr` oder `falsch` sind. Die Wahrheitstabelle dazu ist:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

In Formeln: $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$.

Rangfolge der Operatoren

Die Rangfolge der Operatoren von stark nach schwach bindend ist:

- Klammern (sind kein Operator),
- Negation: $\neg$; Quantoren: $\forall$, $\exists$ (siehe unten))
- Konjunktion: $\wedge$,
- Disjunktion: $\vee$,
- Implikation: $\Rightarrow$,
- Äquivalenz: $\Leftrightarrow$,
- Aussagenlogische Äquivalenz: $\equiv$.

Tautologie & Kontradiktion

Wir nennen zwei Aussagen A und B *äquivalent*, wenn sie unter allen Belegungen den selben Wahrheitswert annehmen, das heißt, wenn ihre Wahrheitstabellen identisch sind. Wir schreiben dann $A \equiv B$.

Nach der Definition der Äquivalenz ist dann die Aussage $A \Leftrightarrow B$ immer wahr und wir nennen sie eine *Tautologie* oder *allgemeingültig*. Eine einfache Aussage, die immer wahr ist, ist z.B. $A \vee \neg A$.

Das Gegenteil wäre eine *Kontradiktion* oder ein *Widerspruch*. Das ist eine Aussage, die immer falsch ist. Ein Beispiel dafür ist $A \wedge \neg A$.

Gesetze I

Konstanz:	$A \land \neg A \equiv \mathtt{f}$ $A \lor \neg A \equiv \mathtt{w}$
Doppelte Negation:	$\neg\neg A \equiv A$
Assoziativität:	$(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C)$ $(A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$
Kommutativität:	$A \lor B \equiv B \lor A$ $A \land B \equiv B \land A$
Idempotenz:	$A \lor A \equiv A$ $A \land A \equiv A$

Gesetze II

Absorption:	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
Neutralität:	$A \vee \mathtt{f} \equiv A$ $A \wedge \mathtt{w} \equiv A$
Distributivität:	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
De Morgansche Gesetze:	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Gesetze III

Konstanz:	$A \oplus A \equiv \mathtt{f}$
Neutralität:	$A \oplus \mathtt{f} \equiv A$
Assoziativität:	$(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$
Kommutativität:	$A \oplus B \equiv B \oplus A$
	$A \Leftrightarrow B \equiv B \Leftrightarrow A$
Äquivalenz:	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
Exklusives Oder:	$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
Implikation:	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
Prinzip der Kontraposition:	$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Prädikatenlogik

Prädikat

Definition (Prädikat)

Ein Prädikat erlaubt das Einsetzen einer festen Anzahl von Variablen und liefert darauf einen Wahrheitswert zurück. Ein Prädikat, welches n Variablen annimmt, nennen wir *n-stellig*.

Prädikat

Definition (Prädikat)

Ein Prädikat erlaubt das Einsetzen einer festen Anzahl von Variablen und liefert darauf einen Wahrheitswert zurück. Ein Prädikat, welches n Variablen annimmt, nennen wir *n-stellig*.

Beispiel

Das Prädikat "… ist fiktional" liefert auf das Einsetzen von "Moria", "Donald Duck" oder "Elysium" den Wahrheitswert `wahr`, auf das Einsetzen von "Jackie Kennedy" oder "Ian McKellen" den Wahrheitswert `falsch`.

Eine Eigenschaft wie "$x < 5$" ist ebenso ein Prädikat, welches z.B. für $x = 3$ den Wahrheitswert `wahr` und für "$x = 10$" den Wahrheitswert `falsch` zurückgibt.

Definition (Allquantor)

Sei $P(x)$ ein einstelliges Prädikat. Um auszusagen, dass das Prädikat $P(x)$ für alle x gilt, schreiben wir $\forall x : P(x)$, gelesen: "für alle x gilt $P(x)$". "$\forall$" heißt *Allquantor*.

Formal: Enthalte die Folge der x_i alle x, dann definieren wir:

$$\forall x : P(x) \; \equiv \; \bigwedge_i P(x_i) \equiv \underbrace{P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots}_{\text{alle } x_i}$$

Definition (Existenzquantor)

Sei $P(x)$ ein einstelliges Prädikat. Um auszusagen, dass $P(x)$ für *mindestens* ein x gilt, schreiben wir $\exists x : P(x)$ und lesen "es existiert ein x für das $P(x)$ gilt". "$\exists$" nennt sich *Existenzquantor*.

Formal: Enthalte die Folge der x_i alle x, dann definieren wir:

$$\exists x : P(x) \equiv \bigvee_i P(x_i) \equiv \underbrace{P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \dots}_{\text{alle } x_i}$$

Schreibweise von Quantoren

Die Schreibweise für Quantorenaussagen ist nicht einheitlich. Man liest $\forall x : P(x)$, $\forall x P(x)$ oder $\forall x . P(x)$.

In der Aussage $\forall x : P(x)$ bezeichnen wir x als *gebundene Variable*, da sie an den Quantor gebunden ist. Im Gegensatz dazu ist in der Aussage $\forall x : P(x, y)$ die Variable y eine *freie Variable*.

Quantoren beziehen sich auf so wenig wie möglich (und stehen damit auf der Höhe der Negation in der Rangfolge der Operatoren. D.h., $\forall x : P(x) \Leftrightarrow Q(y)$ ist das Gleiche wie $(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow Q(y)$. Sonst müssen Sie klammern: $\forall x : (P(x) \Leftrightarrow Q(y))$.

Einzigkeitsquantor

Es gibt auch einen Quantor, der aussagt, dass ein Prädikat *genau einmal* `wahr` ist (Einzigkeitsquantor).

Er ist so definiert, für ein Prädikat $B(x)$:

$$\exists! x : B(x) \;:=\; \exists x : (B(x) \land \forall y : (B(y) \Rightarrow y = x)).$$

Quantorenregeln

Sei A eine Aussage. Dann kann man die Negation einer Quantorenaussage direkt vor die Aussage A ziehen, wenn man den Quantor "umdreht":

$$\neg(\forall x : A(x)) \equiv \exists x : \neg A(x)$$
$$\neg(\exists x : A(x)) \equiv \forall x : \neg A(x)$$

Quantorenregeln

Sei A eine Aussage. Dann kann man die Negation einer Quantorenaussage direkt vor die Aussage A ziehen, wenn man den Quantor “umdreht”:

$$\neg(\forall x : A(x)) \equiv \exists x : \neg A(x)$$
$$\neg(\exists x : A(x)) \equiv \forall x : \neg A(x)$$

Die Aussage $\neg(\forall x : A(x))$ bedeutet, dass es *mindestens ein* x geben muss, sodass $A(x)$ `falsch` ist. Das können wir mittels Quantor schreiben als $\exists x : \neg A(x)$.

Quantorenregeln

Sei A eine Aussage. Dann kann man die Negation einer Quantorenaussage direkt vor die Aussage A ziehen, wenn man den Quantor "umdreht":

$$\neg(\forall x : A(x)) \equiv \exists x : \neg A(x)$$
$$\neg(\exists x : A(x)) \equiv \forall x : \neg A(x)$$

Die Aussage $\neg(\forall x : A(x))$ bedeutet, dass es *mindestens ein* x geben muss, sodass $A(x)$ `falsch` ist. Das können wir mittels Quantor schreiben als $\exists x : \neg A(x)$.

Die Aussage $\neg(\exists x : A(x))$ heißt, dass für alle x die Aussage $A(x)$ *nicht* gilt. Daher: $\forall x : \neg A(x)$.

Quantorenregeln

Sei A eine Aussage. Dann kann man die Negation einer Quantorenaussage direkt vor die Aussage A ziehen, wenn man den Quantor "umdreht":

$$\neg(\forall x : A(x)) \equiv \exists x : \neg A(x)$$
$$\neg(\exists x : A(x)) \equiv \forall x : \neg A(x)$$

Die Aussage $\neg(\forall x : A(x))$ bedeutet, dass es *mindestens ein* x geben muss, sodass $A(x)$ $\texttt{falsch}$ ist. Das können wir mittels Quantor schreiben als $\exists x : \neg A(x)$.

Die Aussage $\neg(\exists x : A(x))$ heißt, dass für alle x die Aussage $A(x)$ *nicht* gilt. Daher: $\forall x : \neg A(x)$.
Diese Regeln sind eine direkte Konsequenz aus den De Morganschen Gesetzen!

Ausblick: Quantisierung über Mengen

Obwohl wir erst morgen formell anfangen, mit Mengen zu arbeiten, werden wir bereits darüber reden, über eine Menge zu quantisieren. Mit dem heute besprochenen Vokabular können wir nun eine große Anzahl mächtiger Aussagen formulieren.

Ausblick: Quantisierung über Mengen

Obwohl wir erst morgen formell anfangen, mit Mengen zu arbeiten, werden wir bereits darüber reden, über eine Menge zu quantisieren. Mit dem heute besprochenen Vokabular können wir nun eine große Anzahl mächtiger Aussagen formulieren.

Definition (Quantisierung über eine Menge)

Sei $P(x)$ ein einstelliges Prädikat. Um auszusagen, dass $P(x)$ für ein/für alle x in einer bestimmten Menge M gilt, schreiben wir $\forall x \in M : P(x)$ bzw. $\exists x \in M : P(x)$.

Formal:

$$\exists x \in M : P(x) \equiv \exists x : (x \in M \land P(x)),$$
$$\forall x \in M : P(x) \equiv \forall x : (x \in M \Rightarrow P(x)).$$