Vorkurs
Formale Methoden der Informatik

Bettina Esser und Michael Kaibel

2. September bis 13. September 2024, Universität Bonn

Informatik V

Mengen

Menge

Nach Georg Cantor ist eine *Menge* eine Ansammlung von wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens. Das können Zahlen sein, aber auch jede andere Form von (evtl. abstrakten) Objekten. Auch andere Mengen können in einer Menge enthalten sein.

Menge

Nach Georg Cantor ist eine *Menge* eine Ansammlung von wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens. Das können Zahlen sein, aber auch jede andere Form von (evtl. abstrakten) Objekten. Auch andere Mengen können in einer Menge enthalten sein.

Sei M eine Menge und x ein Objekt dieser Menge, so sagen wir, dass x ein *Element* der Menge M ist. Wir schreiben dafür $x \in M$. Es muss entscheidbar sein, ob ein Element x in der Menge M enthalten ist oder nicht.

Menge

Nach Georg Cantor ist eine *Menge* eine Ansammlung von wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens. Das können Zahlen sein, aber auch jede andere Form von (evtl. abstrakten) Objekten. Auch andere Mengen können in einer Menge enthalten sein.

Sei M eine Menge und x ein Objekt dieser Menge, so sagen wir, dass x ein *Element* der Menge M ist. Wir schreiben dafür $x \in M$. Es muss entscheidbar sein, ob ein Element x in der Menge M enthalten ist oder nicht.

Ist x kein Element der Menge M, so schreiben wir $x \notin M$. Wollen wir eine Aussage über mehrere Elemente machen, so schreiben wir auch $x, y \in M$.

Mengen beschreiben I

Wir können *endliche Mengen* beschreiben durch Aufzählung ihrer Elemente. Dabei werden die Elemente durch geschweifte Klammern ("{" und "}") eingefasst:

$$
\begin{aligned}
B &= \{0, 1\},\\
F &= \{\mathrm{rot}, \mathrm{grün}, \mathrm{blau}\},\\
A &= \{\alpha, \omega\},\\
P &= \{1, x, x^2, x^3\}.
\end{aligned}
$$

Nach Definition gilt: $\forall x : x \notin \emptyset$.

Mengen beschreiben I

Wir können *endliche Mengen* beschreiben durch Aufzählung ihrer Elemente. Dabei werden die Elemente durch geschweifte Klammern ("{" und "}") eingefasst:

$$
\begin{aligned}
B &= \{0, 1\}, \\
F &= \{\text{rot}, \text{grün}, \text{blau}\}, \\
A &= \{\alpha, \omega\}, \\
P &= \{1, x, x^2, x^3\}.
\end{aligned}
$$

Die leere Menge (die Menge ohne Elemente) wird mit $\emptyset$ (oder auch mit $\{\}$) bezeichnet.

$$\emptyset := \{\}.$$

Nach Definition gilt: $\forall x : x \notin \emptyset$.

Mengen beschreiben II

Mengen sind *ungeordnet*:

$$\{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3\}.$$

Mengen beschreiben II

Mengen sind *ungeordnet*:

$$\{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3\}.$$

Jedes Element kommt nur einmal in der Menge vor, selbst, wenn es mehrfach angeben wird. Daher müssen die Elemente wohlunterscheidbar sein.

$$\{6, 4, 6\} = \{4, 6\}.$$

Mengen beschreiben II

Mengen sind *ungeordnet*:

$$\{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3\}.$$

Jedes Element kommt nur einmal in der Menge vor, selbst, wenn es mehrfach angeben wird. Daher müssen die Elemente wohlunterscheidbar sein.

$$\{6, 4, 6\} = \{4, 6\}.$$

Wenn die Abfolge klar ist, können wir uns mit "..." Schreibarbeit sparen:

$$D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Mengen beschreiben III

Auf diese Weise kann man auch *unendliche Mengen* beschreiben:

$$G = \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Mengen beschreiben III

Auf diese Weise kann man auch *unendliche Mengen* beschreiben:

$$G = \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Wir können auch eine Menge definieren, indem wir eine Eigenschaft ihrer Elemente beschreiben. Die folgende Zeile liest sich "die Menge aller x aus $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: x ist eine Primzahl":

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Mengen beschreiben III

Auf diese Weise kann man auch *unendliche Mengen* beschreiben:

$$G = \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Wir können auch eine Menge definieren, indem wir eine Eigenschaft ihrer Elemente beschreiben. Die folgende Zeile liest sich “die Menge aller x aus $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: x ist eine Primzahl”:

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Damit können wir Prädikatenlogik benutzen, um Mengen zu definieren:

$$G' = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = 2y\} = \{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}.$$

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *rationalen Zahlen*:
  $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *rationalen Zahlen*:
  $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.
- Die Menge der *reellen Zahlen*: $\mathbb{R}$.

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *rationalen Zahlen*:
  $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.
- Die Menge der *reellen Zahlen*: $\mathbb{R}$.
- Die Menge der *komplexen Zahlen*: $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei i die *imaginäre Einheit* ist und definiert ist als $i^2 = -1$.

Bekannte Mengen

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Die Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.
- Die Menge der *rationalen Zahlen*:
  $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.
- Die Menge der *reellen Zahlen*: $\mathbb{R}$.
- Die Menge der *komplexen Zahlen*: $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei i die *imaginäre Einheit* ist und definiert ist als $i^2 = -1$.

Intervalle

Intervalle einer Menge werden durch ihre untere und obere Grenze angegeben. Dabei unterscheidet man *offene* und *abgeschlossene* Intervalle.

- Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ einer Menge M ist definiert als $[a, b] := \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$, das heißt, die Grenzen liegen im Intervall.

Intervalle

Intervalle einer Menge werden durch ihre untere und obere Grenze angegeben. Dabei unterscheidet man *offene* und *abgeschlossene* Intervalle.

- Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ einer Menge M ist definiert als $[a, b] := \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$, das heißt, die Grenzen liegen im Intervall.
- Das offene Intervall (a, b) einer Menge M ist definiert als $(a, b) := \{x \in M \mid a < x < b\}$, das heißt, die Grenzen sind nicht im Intervall enthalten.

Intervalle

Intervalle einer Menge werden durch ihre untere und obere Grenze angegeben. Dabei unterscheidet man *offene* und *abgeschlossene* Intervalle.

- Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ einer Menge M ist definiert als $[a, b] := \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$, das heißt, die Grenzen liegen im Intervall.
- Das offene Intervall (a, b) einer Menge M ist definiert als $(a, b) := \{x \in M \mid a < x < b\}$, das heißt, die Grenzen sind nicht im Intervall enthalten.
- Es gibt auch *halboffene* Intervalle, beispielsweise ist das Intervall $[a, b)$ einer Menge M definiert als $[a, b) := \{x \in M \mid a \leq x < b\}$.

Intervalle

Intervalle einer Menge werden durch ihre untere und obere Grenze angegeben. Dabei unterscheidet man *offene* und *abgeschlossene* Intervalle.

- Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ einer Menge M ist definiert als $[a, b] := \{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$, das heißt, die Grenzen liegen im Intervall.
- Das offene Intervall (a, b) einer Menge M ist definiert als $(a, b) := \{x \in M \mid a < x < b\}$, das heißt, die Grenzen sind nicht im Intervall enthalten.
- Es gibt auch *halboffene* Intervalle, beispielsweise ist das Intervall $[a, b)$ einer Menge M definiert als $[a, b) := \{x \in M \mid a \leq x < b\}$.

Die obere Intervallgrenze kann ∞ sein, resp. die untere Grenze $-\infty$. Das ist eine Art zu schreiben, dass auf dieser Seite keine Grenze existiert.

Operationen auf Mengen

Definition (Vereinigung)

Seien Mengen A und B gegeben, dann definieren wir die *Vereinigung* $C = A \cup B$: C enthält alle Elemente aus A und alle Elemente aus B.[1] In der Sprache der Logik heißt das:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

[1] Aber nicht doppelt, siehe das Konzept der Menge als Kollektion **wohlunterscheidbarer** Objekte.

Schnitt

Definition (Schnitt)

Der *Schnitt* $C = A \cap B$: C enthält alle Elemente, die sowohl in A als auch in B sind. Mittels der Logik definieren wir:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Differenz

Definition (Differenz)

Die *Differenz* $C = A \setminus B$: C enthält alle Elemente aus A, die nicht in B sind. Man sagt auch "das *Komplement* von B in Bezug auf A" oder "A ohne B". Die Definition lautet:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

Eine andere Schreibweise statt $A \setminus B$ ist $\overline{B}$, wobei hier zuerst unklar bleibt, welches die Obermenge ist.

Teilmengenbeziehungen I

Definition (Teilmengenbeziehungen)

- Wir nennen A und B *gleich*, geschrieben $A = B$, falls gilt:

$$A = B :\!= \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Teilmengenbeziehungen I

Definition (Teilmengenbeziehungen)

- Wir nennen A und B *gleich*, geschrieben $A = B$, falls gilt:

$$A = B :\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

- Wir nennen A eine *Teilmenge* von B, geschrieben $A \subseteq B$, falls alle Elemente aus A auch in B liegen. Die Definition lautet:

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Teilmengenbeziehungen I

Definition (Teilmengenbeziehungen)

- Wir nennen A und B *gleich*, geschrieben $A = B$, falls gilt:

$$A = B :\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

- Wir nennen A eine *Teilmenge* von B, geschrieben $A \subseteq B$, falls alle Elemente aus A auch in B liegen. Die Definition lautet:

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- Umgekehrt heißt B *Obermenge* von A: $B \supseteq A$.

Teilmengenbeziehungen II

Definition (Teilmengenbeziehungen)

- Eine *echte Teilmenge* $A \subset B$ (oder, noch expliziter: $A \subsetneq B$) ist eine Teilmenge A von B mit $A \neq B$. Also:

$$A \subset B \;:=\; A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Analog $B \supset A$.

Teilmengenbeziehungen II

Definition (Teilmengenbeziehungen)

- Eine *echte Teilmenge* $A \subset B$ (oder, noch expliziter: $A \subsetneq B$) ist eine Teilmenge A von B mit $A \neq B$. Also:

  $$A \subset B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

  Analog $B \supset A$.
- Wir nennen A und B *disjunkt*, falls es kein Element gibt, welches in beiden Mengen enthalten ist, also falls gilt: $A \cap B = \emptyset$.

Eigenschaften von Mengen I

- Die Vereinigung der leeren Menge mit einer beliebigen Menge A ergibt A: $A \cup \emptyset = A$.

Eigenschaften von Mengen I

- Die Vereinigung der leeren Menge mit einer beliebigen Menge A ergibt A: $A \cup \emptyset = A$.
- Der Schnitt aus der leeren Menge mit jeder Menge A ergibt die leere Menge: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Eigenschaften von Mengen I

- Die Vereinigung der leeren Menge mit einer beliebigen Menge A ergibt A: $A \cup \emptyset = A$.
- Der Schnitt aus der leeren Menge mit jeder Menge A ergibt die leere Menge: $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge A: $\emptyset \subseteq A$.

Eigenschaften von Mengen I

- Die Vereinigung der leeren Menge mit einer beliebigen Menge A ergibt A: $A \cup \emptyset = A$.
- Der Schnitt aus der leeren Menge mit jeder Menge A ergibt die leere Menge: $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge A: $\emptyset \subseteq A$.
- Jede Menge A ist Teilmenge ihrer selbst: $A \subseteq A$. Die leere Mengen und die Menge selbst nennt man auch die *trivialen* Teilmengen.

Eigenschaften von Mengen II

- Die Gleichheit zweier Mengen A und B gilt genau dann, wenn:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

  Das ist teilweise einfacher zu beweisen als die Gleichheit nach der obigen Definition.

Eigenschaften von Mengen II

- Die Gleichheit zweier Mengen A und B gilt genau dann, wenn:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

  Das ist teilweise einfacher zu beweisen als die Gleichheit nach der obigen Definition.

- Der Schnitt einer Menge A mit sich selbst und die Vereinigung mit sich selbst ergeben wieder A:

$$A \cup A = A \quad \text{und} \quad A \cap A = A.$$

Eigenschaften von Mengen II

- Die Gleichheit zweier Mengen A und B gilt genau dann, wenn:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

  Das ist teilweise einfacher zu beweisen als die Gleichheit nach der obigen Definition.

- Der Schnitt einer Menge A mit sich selbst und die Vereinigung mit sich selbst ergeben wieder A:

$$A \cup A = A \quad \text{und} \quad A \cap A = A.$$

- Vereinigung und Schnitt sind assoziativ. Es gilt:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Eigenschaften von Mengen III

- Die De Morganschen Gesetze gelten auch auf Mengen. Seien A, B und C Mengen mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$. Die De Morganschen Gesetze besagen dann:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \text{oder anders geschrieben}$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Eigenschaften von Mengen III

- Die De Morganschen Gesetze gelten auch auf Mengen. Seien A, B und C Mengen mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$. Die De Morganschen Gesetze besagen dann:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \text{oder anders geschrieben}$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Ebenso:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{oder anders geschrieben}$$
$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Beweis: $A \cap \emptyset = \emptyset$

Sei A eine Menge. Zu zeigen:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Beweis: $A \cap \emptyset = \emptyset$

Sei A eine Menge. Zu zeigen:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Beweis: Nach Definition von Schnitt ist das:

$$\{x \mid x \in A \land x \in \emptyset\} =$$

Beweis: $A \cap \emptyset = \emptyset$

Sei A eine Menge. Zu zeigen:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Beweis: Nach Definition von Schnitt ist das:

$$\begin{aligned} \{x \mid x \in A \land x \in \emptyset\} &= \\ \{x \mid x \in A \land \texttt{falsch}\} &= \end{aligned}$$

Beweis: $A \cap \emptyset = \emptyset$

Sei A eine Menge. Zu zeigen:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Beweis: Nach Definition von Schnitt ist das:

$$\begin{aligned} \{x \mid x \in A \wedge x \in \emptyset\} &= \\ \{x \mid x \in A \wedge \texttt{falsch}\} &= \\ \{x \mid \texttt{falsch}\} &= \\ \{\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

□

Beweis: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: Nach Definition von Mengengleichheit heißt das:

$$\forall x : (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$$

Beweis: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: Nach Definition von Mengengleichheit heißt das:

$$\forall x : (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$$

Wähle ein x aus: fest, aber beliebig. Dann gilt:

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow$$
$$x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

Beweis: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: Nach Definition von Mengengleichheit heißt das:

$$\forall x : (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$$

Wähle ein x aus: fest, aber beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow \\ x \in (A \cap B) \wedge x \in C &\Leftrightarrow \\ (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Beweis: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: Nach Definition von Mengengleichheit heißt das:

$$\forall x : (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$$

Wähle ein x aus: fest, aber beliebig. Dann gilt:

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow$$

$$x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

Nach Definition ist $\wedge$ assoziativ:

$$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: Nach Definition von Mengengleichheit heißt das:

$$\forall x : (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$$

Wähle ein x aus: fest, aber beliebig. Dann gilt:

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow$$
$$x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

Nach Definition ist $\wedge$ assoziativ:

$$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$$
$$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

Beweis: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Seien A, B, C Mengen. Zu zeigen:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis: Nach Definition von Mengengleichheit heißt das:

$$\forall x : (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$$

Wähle ein x aus: fest, aber beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow \\ x \in (A \cap B) \wedge x \in C &\Leftrightarrow \\ (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Nach Definition ist $\wedge$ assoziativ:

$$\begin{aligned} x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) &\Leftrightarrow \\ x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten steht das Gleiche, daher gilt die Äquivalenz. Da x beliebig war, gilt die Aussage für alle x und ist damit bewiesen. $\square$

Beweis: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Mengen mit $(A \cup B) \subseteq C$. Zu zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Beweis: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Mengen mit $(A \cup B) \subseteq C$. Zu zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Beweis:

$$\{x \mid x \in C \wedge \neg(x \in (A \cup B))\} =$$

Beweis: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Mengen mit $(A \cup B) \subseteq C$. Zu zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\{x \mid x \in C \land \neg(x \in (A \cup B))\} &= \\
\{x \mid x \in C \land \neg(x \in A \lor x \in B)\} &=
\end{aligned}$$

Beweis: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Mengen mit $(A \cup B) \subseteq C$. Zu zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Beweis:

$$\{x \mid x \in C \wedge \neg(x \in (A \cup B))\} =$$

$$\{x \mid x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B)\} =$$

Nach Anwendung von De Morgan:

$$\{x \mid x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\} =$$

$$\{x \mid x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} =$$

Beweis: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Mengen mit $(A \cup B) \subseteq C$. Zu zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Beweis:

$$\{x \mid x \in C \land \neg(x \in (A \cup B))\} =$$

$$\{x \mid x \in C \land \neg(x \in A \lor x \in B)\} =$$

Nach Anwendung von De Morgan:

$$\{x \mid x \in C \land (x \notin A \land x \notin B)\} =$$

$$\{x \mid x \in C \land x \notin A \land x \notin B\} =$$

Wir erweitern (nach Idempotenz):

$$\{x \mid x \in C \land x \notin A \land x \in C \land x \notin B\} =$$

Beweis: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Seien A, B, C Mengen mit $(A \cup B) \subseteq C$. Zu zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Beweis:

$$\{x \mid x \in C \wedge \neg(x \in (A \cup B))\} =$$

$$\{x \mid x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B)\} =$$

Nach Anwendung von De Morgan:

$$\{x \mid x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\} =$$

$$\{x \mid x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} =$$

Wir erweitern (nach Idempotenz):

$$\{x \mid x \in C \wedge x \notin A \wedge x \in C \wedge x \notin B\} =$$

$$\{x \mid x \in (C \setminus A) \wedge x \in (C \setminus B)\} = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \qquad \square$$

Einschub: Leere Quantoren

Wenn "$\emptyset$" die leere Menge bezeichnet, dann ist die Aussage $\forall x \in \emptyset : A(x)$ automatisch `wahr` für ein beliebiges Prädikat $A(x)$. Es gibt kein x, für das die Aussage `falsch` wäre.

Einschub: Leere Quantoren

Wenn "$\emptyset$" die leere Menge bezeichnet, dann ist die Aussage $\forall x \in \emptyset : A(x)$ automatisch `wahr` für ein beliebiges Prädikat $A(x)$. Es gibt kein x, für das die Aussage `falsch` wäre.

Das lässt sich auch einfach beweisen:

$$\begin{aligned}\forall x \in \emptyset : A(x) &\equiv \forall x : (x \in \emptyset \Rightarrow A(x)) \\ &\equiv \forall x : (\mathtt{f} \Rightarrow A(x))\end{aligned}$$

Einschub: Leere Quantoren

Wenn "$\emptyset$" die leere Menge bezeichnet, dann ist die Aussage $\forall x \in \emptyset : A(x)$ automatisch `wahr` für ein beliebiges Prädikat $A(x)$. Es gibt kein x, für das die Aussage `falsch` wäre.

Das lässt sich auch einfach beweisen:

$$\begin{aligned}\forall x \in \emptyset : A(x) &\equiv \forall x : (x \in \emptyset \Rightarrow A(x)) \\ &\equiv \forall x : (\mathtt{f} \Rightarrow A(x))\end{aligned}$$

Aus der Definition der Implikation wissen wir aber, dass eine Folgerung aus etwas Falschem immer `wahr` ist:

$$\begin{aligned}\forall x \in \emptyset : A(x) &\equiv \forall x : \mathtt{w} \\ &\equiv \mathtt{w}.\end{aligned}$$

$\square$

Einschub: Leere Quantoren

Wenn "$\emptyset$" die leere Menge bezeichnet, dann ist die Aussage $\forall x \in \emptyset : A(x)$ automatisch `wahr` für ein beliebiges Prädikat $A(x)$. Es gibt kein x, für das die Aussage `falsch` wäre.

Das lässt sich auch einfach beweisen:

$$\begin{aligned}\forall x \in \emptyset : A(x) &\equiv \forall x : (x \in \emptyset \Rightarrow A(x)) \\ &\equiv \forall x : (\mathtt{f} \Rightarrow A(x))\end{aligned}$$

Aus der Definition der Implikation wissen wir aber, dass eine Folgerung aus etwas Falschem immer `wahr` ist:

$$\begin{aligned}\forall x \in \emptyset : A(x) &\equiv \forall x : \mathtt{w} \\ &\equiv \mathtt{w}.\end{aligned}$$

□

Umgekehrt ist $\exists x \in \emptyset : A(x)$ `falsch`, da kein x existiert, für das die Aussage `wahr` wäre. Der Beweis funktioniert analog.

Operationen auf Mengen II

Kardinalität

Definition (Kardinalität)

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M heißt *Kardinalität* oder *Mächtigkeit*. Wir schreiben dafür $|M|$, manchmal findet sich auch $\#M$.

Kardinalität

Definition (Kardinalität)

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M heißt *Kardinalität* oder *Mächtigkeit*. Wir schreiben dafür $|M|$, manchmal findet sich auch $\#M$.

Diese intuitive Definition funktioniert ohne weiteres nur für **endliche** Mengen. Mengen, die keine endliche Anzahl an Elementen besitzen, haben eine Mächtigkeit von ∞. Ohne weiteres lassen sich unendlich mächtige Mengen in ihrer Größe nicht unterscheiden. Georg Cantor fand um 1892 eine geniale Art, den Sachverhalt zu untersuchen, die im ersten Semester in LudS genau betrachtet wird.

Potenzmenge

Definition (Potenzmenge)

Zu einer gegebenen Menge A ist die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von A.

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ zu einer Menge M hat die Kardinalität $2^{|M|}$. Die trivialen Teilmengen von A ($\emptyset$ und A selbst) sind auch in der Potenzmenge enthalten.

Kartesisches Produkt

Definition (Kartesisches Produkt)

Das *kartesische Produkt* $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller *geordneten Paare* (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. "Geordnetes Paar" bedeutet, dass die Reihenfolge von a, b wichtig ist, im allgemeinen also $(a, b) \neq (b, a)$ gilt. Formal gilt:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Sei B das n-fache kartesische Produkt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ von Mengen A_i, dann nennt man ein Element von B ein n-*Tupel*. Das heißt: $B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$. Ein Paar ist also ein 2-Tupel.