Vorkurs
Formale Methoden der Informatik

Bettina Esser und Michael Kaibel

2. September bis 13. September 2024, Universität Bonn

Informatik V

Beweistechniken

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ gilt für jeden Wert $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

Es genügt, folgende Eigenschaften zu zeigen:

1. $A(n_0)$ ist $\texttt{wahr}$.
2. $\forall n \geq n_0 : (A(n) \Rightarrow A(n+1))$.

Daraus folgt, dass $A(n)$ $\texttt{wahr}$ ist für alle $n \geq n_0$.

Vollständige Induktion

Entsprechend unterteilt sich der Beweisvorgang bei der vollständigen Induktion in drei Schritte:

1. Zuerst formulieren wir die *Induktionsvoraussetzung* (IV). Das ist die Aussage $A(n)$, deren Richtigkeit wir im Folgenden annehmen.
   Tipp: Formulieren Sie die IV stets im Stil $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \leq n : A(k)$ ist `wahr`
2. Dann zeigen wir die zu beweisende Aussage bezüglich des Startwerts n_0. Dies bezeichnen wir als *Induktionsanfang* (IA).
3. Dann folgt der *Induktionsschritt* (IS): wir beweisen aus der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung: da die zu beweisende Aussage für n bereits bewiesen ist, beweisen wir nun die Gültigkeit der Aussage für $n + 1$.

Vollständige Induktion: Summe der Ungeraden (1)

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

Beweis:

Die Induktionsvoraussetzung ist leicht formuliert: $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \leq n : \sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$

Der Induktionsanfang ist leicht überprüft: Für $n = 1$ ist

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2. \qquad \checkmark$$

Vollständige Induktion: Summe der Ungeraden (2)

Wir beweisen im Induktionsschritt die Aussage für $n+1$ unter der Annahme, dass sie für n bereits bewiesen ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2(n+1) - 1.$$

Hier haben wir wieder den letzten Summanden aus der Summe gezogen und einzeln ans Ende geschrieben. Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung:

Vollständige Induktion: Summe der Ungeraden (2)

Wir beweisen im Induktionsschritt die Aussage für $n+1$ unter der Annahme, dass sie für n bereits bewiesen ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2(n+1) - 1.$$

Hier haben wir wieder den letzten Summanden aus der Summe gezogen und einzeln ans Ende geschrieben. Jetzt verwenden wir die Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} &= n^2 + 2(n+1) - 1. \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die erste binomische Formel an und erhalten

$$= (n+1)^2.$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Vollständige Induktion: Teilbarkeit

Wir möchten zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist.

IV: $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

Vollständige Induktion: Teilbarkeit

Wir möchten zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist.

IV: $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

IA: Für $n = 0$ steht da: $0^5 - 0 = 0 = 5 \cdot 0$. 0 ist durch 5 teilbar.

Vollständige Induktion: Teilbarkeit

Wir möchten zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist.

IV: $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

IA: Für $n = 0$ steht da: $0^5 - 0 = 0 = 5 \cdot 0$. 0 ist durch 5 teilbar.

IS: Wir können annehmen, dass $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist und wollen zeigen, dass $(n+1)^5 - (n+1)$ ebenfalls durch 5 teilbar ist.

Vollständige Induktion: Teilbarkeit

Wir möchten zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist.

IV: $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

IA: Für $n = 0$ steht da: $0^5 - 0 = 0 = 5 \cdot 0$. 0 ist durch 5 teilbar.

IS: Wir können annehmen, dass $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist und wollen zeigen, dass $(n+1)^5 - (n+1)$ ebenfalls durch 5 teilbar ist.

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n+1) &= \\ n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 &= \\ n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n &= \\ \underbrace{n^5 - n}_{\text{nach IV}} + \underbrace{5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{\text{durch 5 teilbar}} & \end{aligned}$$

Da beide Summanden durch 5 teilbar sind, ist die Summe durch 5 teilbar.

Vollständige Induktion: Was ist hier falsch?

Behauptung: $3^n + 4$ ist durch 2 teilbar.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$3^n + 4$ ist durch 2 teilbar. Wir zeigen, dass $3^{n+1} + 4$ durch 2 teilbar ist.

$$3^{n+1} + 4 = 3 \cdot 3^n + 4 = 2 \cdot 3^n + \underbrace{(3^n + 4)}_{\text{nach IV teilbar durch 2}}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Vollständige Induktion: Was ist hier falsch?

Behauptung: $3^n + 4$ ist durch 2 teilbar.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$3^n + 4$ ist durch 2 teilbar. Wir zeigen, dass $3^{n+1} + 4$ durch 2 teilbar ist.

$$3^{n+1} + 4 = 3 \cdot 3^n + 4 = 2 \cdot 3^n + \underbrace{(3^n + 4)}_{\text{nach IV teilbar durch 2}}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

But wait! Wenn wir ausprobieren, z.B. mit $n = 2$, finden wir $3^2 + 4 = 9 + 4 = 13$, aber $2 \nmid 13$. Was ist hier falsch gelaufen?

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \rightarrow (n+1)$: zeige $(n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$\Leftarrow \quad (n+1)^2 < 2 \cdot n^2$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$\begin{aligned} \Leftarrow \quad & (n+1)^2 < 2 \cdot n^2 \\ \Leftrightarrow & n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 \end{aligned}$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$\begin{aligned} \Leftarrow \quad & (n+1)^2 < 2 \cdot n^2 \\ \Leftrightarrow & n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2n + 1 < n^2 \end{aligned}$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$\begin{aligned}
\Leftarrow \quad & (n+1)^2 < 2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow\; & n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2n + 1 < n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 < n^2 - 2n
\end{aligned}$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$
\begin{aligned}
&\Leftarrow & (n+1)^2 &< 2 \cdot n^2 \\
&\Leftrightarrow & n^2 + 2n + 1 &< n^2 + n^2 \\
&\Leftrightarrow & 2n + 1 &< n^2 \\
&\Leftrightarrow & 1 &< n^2 - 2n \\
&\Leftrightarrow & 2 &< n^2 - 2n + 1
\end{aligned}
$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$
\begin{aligned}
\Leftarrow \quad & (n+1)^2 < 2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2n + 1 < n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 < n^2 - 2n \\
\Leftrightarrow \quad & 2 < n^2 - 2n + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 < (n-1)^2
\end{aligned}
$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$\begin{aligned}
\Leftarrow &\quad (n+1)^2 < 2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow &\quad n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 \\
\Leftrightarrow &\quad 2n + 1 < n^2 \\
\Leftrightarrow &\quad 1 < n^2 - 2n \\
\Leftrightarrow &\quad 2 < n^2 - 2n + 1 \\
\Leftrightarrow &\quad 2 < (n-1)^2 \\
\Leftrightarrow &\quad \sqrt{2} < n - 1
\end{aligned}$$

Vollständige Induktion: Ungleichung

Zu zeigen: $n^2 < 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$.

IV: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$, sodass $n^2 < 2^n$.

IA: Für $n = 5$ ist $25 < 32$ — stimmt schon mal.

IS: $n \to (n+1)$: zeige $\quad (n+1)^2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2 \cdot 2^n$

Wir verschärfen die Aussage, indem wir die IV benutzen:

$$
\begin{aligned}
\Leftarrow \quad & (n+1)^2 < 2 \cdot n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2n + 1 < n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 < n^2 - 2n \\
\Leftrightarrow \quad & 2 < n^2 - 2n + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 < (n-1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{2} < n - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{2} + 1 < n
\end{aligned}
$$

□

Beispiele für „klassische" Induktionen, Diskussion an der Tafel

- Alle Kühe sind rosa.

Beispiele für „klassische" Induktionen, Diskussion an der Tafel

- Alle Kühe sind rosa.
- Bernoulli-Ungleichung: Für $x > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + xn$.

Beispiele für „klassische" Induktionen, Diskussion an der Tafel

- Alle Kühe sind rosa.
- Bernoulli-Ungleichung: Für $x > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + xn$.
- Schubfachprinzip: Wenn in einem Schrank mit $n \in \mathbb{N}$ Schubfächern $n + 1$ Objekte gelagert werden, existiert ein Schubfach, in dem mehr als ein Objekt enthalten ist.

Beispiele für „klassische" Induktionen, Diskussion an der Tafel

- Alle Kühe sind rosa.
- Bernoulli-Ungleichung: Für $x > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + xn$.
- Schubfachprinzip: Wenn in einem Schrank mit $n \in \mathbb{N}$ Schubfächern $n + 1$ Objekte gelagert werden, existiert ein Schubfach, in dem mehr als ein Objekt enthalten ist.
- Die „Türme von Hanoi" mit $n \in \mathbb{N}$ Scheiben können in $2^n - 1$ Schritten gelöst werden.